$$R(\nu,\kappa) + R(\nu,\kappa-1) + R(\nu,\kappa-2), \quad \kappa=2$$

$$R(\nu,\kappa) + R(\nu,\kappa-1) + R(\nu,\kappa-2) + R(\nu,\kappa-3)$$

↳ $\kappa \geq 3$

|14/12/2023|

Ασκήσεις - Εφαρμογές

① Πιθανότητες - Μέση Τιμή

Πείραμα τύχης = διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.

Εστιαζόμαστε:

- Σε πειράματα με πεπερασμένο αριθμό ισοπίθανων αποτελεσμάτων.

$$\text{Πιθανότητα ενδεχομένου} = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}}$$

π.χ.

ρίψη ζαριού 10 φορές.

$$\text{Πιθανότητα να "έρχεται" τουλάχιστον ένα 6άρι} = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}}.$$

Αποτέλεσμα → μια διατεταγμένη 10-άδα αριθμών από $\{1,2,3,4,5,6\}$

↳ μια πλειάδα από (περίπου)

Ευνοϊκό Αποτέλεσμα → Διατεταγμένη 10-άδα που εμφανίζεται ένα τουλάχιστον 6άρι.

Άρα,

$$\text{Πιθ} = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}} = \frac{6^{10} - \boxed{5^{10}}}{6^{10}}$$

δεκάδες από το {1, 2, ..., 6} που δεν εμφ. το 6άρι.

X = τυχαία μεταβλητή. (= Αριθμητικό χαρακτηριστικό Πειράματος.)

πχ: X = # εμφανίσεων "6" σε 10 ρίψεις ζαριού.

Βρήκαμε

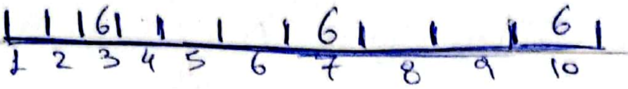
$$\underbrace{\boxed{P}}_{\text{πιθανότητα}}(X \geq 1) = \frac{6^{10} - 5^{10}}{6^{10}}$$

$$\underbrace{P(X = x)}_{\substack{\text{πιθανότητες σε 10 ρίψεις}\\ \text{ζαριού να εμφ.}\\ \text{ακριβώς } x\\ \text{6άρια.}}} = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\boxed{\text{Δυνατές}} \rightarrow 6^{10}}$$

Ευνοϊκό Αποτέλεσμα για X=x

‖

Μια διατεταγμένη 10-άδα από το {1, ..., 6}, όπου υπάρχουν <u>ακριβώς</u> x 6άρια δλδ



δεν έχει σημασία η διάταξη, αλλά διαλέγω θέσεις.

1° Βήμα: Επιλογή θέσεων για τα 6άρια → $\binom{10}{x}$ τρόποι.

2° Βήμα: Τοποθέτηση Αριθμών από $\{1,...,5\}$ στις υπόλοιπες θέσεις → 5^{10-x} τρόποι.

Άρα,

$$\underbrace{P(X=x)}_{\text{Συνάρτηση πιθανότητας της } X} = \frac{\binom{10}{x}5^{10-x}}{6^{10}}, \quad x=0,1,2,...,10.$$

$P(X=x) \geq 0$

$\sum_x P(X=x) = 1.$

$$P(X=x) = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}}$$

$\downarrow$

Ποσοστό Ευνοϊκών αποτελεσμάτων για να συμβεί το $X=x$.

$\downarrow$

Μακροπρόθεσμο ποσοστό εμφανίσεων του $X=x$, αν το πείραμα επαναλαμβάνεται επ' άπειρον.

Π.χ. Αν θέλαμε να βρούμε πειραματικά την $E(x)$ με $X = \#$ εμφ. του "6" σε 10 ρίψεις ζαριού: θα κάναμε το εξής: Επανάληψη του πειράματος πολλές φορές, καταγραφή της X

Μέση Τιμή της $X = E(x) = \sum_{x} x P(X=x)$.

↑ Expectation

Πείραμα	Εμφ. "6" = X
1	2
2	5
3	1
4	2
5	2

κλπ.

$$E(x) \simeq \frac{2+5+1+2+2}{5}$$

οπότε:

$$E(x) = \frac{\sum_{x} x \cdot \boxed{\#\text{πειραμάτων που εμφ. } X=x}}{\boxed{\#\text{ πειραμάτων.}}}$$

→ $P(X=x)$ καθώς #πειραμάτων τείνει στο ∞.

π.χ. Σας 10 ρίψεις ζαριού με X = #εμφ. 6αριού.

$$E(x) = \sum_{x=\cancel{0}1}^{10} x \frac{\binom{10}{x} 5^{10-x}}{6^{10}} =$$

$$= \frac{5^{10}}{6^{10}} \sum_{x=\cancel{0}1}^{10} \frac{x\binom{10}{x}}{5^{x}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \sum_{x=\cancel{0}1}^{10} x \frac{10}{\cancel{x}} \binom{9}{x-1} 5^{-x} \overset{k=x-1}{=}$$

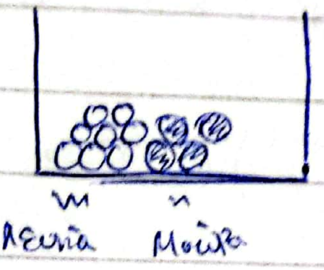
$$= \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \cdot 10 \cdot \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{5}\right)^{9} =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{6^9}{5^9} = \frac{10}{6}$$

② Το διωνυμικό μοντέλο κάλπης

Πείραμα τύχης: Κάλπη με m λευκά και n μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγω N σφαιρίδια με επανάθεση.

1, ..., m   m+1, m+2, ..., m+n



X = # Λευκών.

P(X = x) = ;

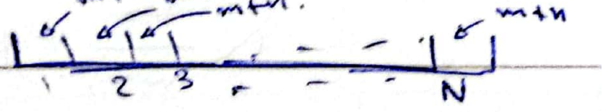
E(X) = ;

Λ▸ $P(X=x) = \dfrac{\text{Ευνοϊκά Αποτελέσματα}}{\text{Δυνατά Αποτελέσματα}}$

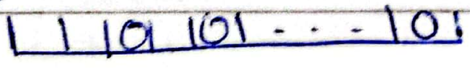
Δυνατό αποτέλεσμα = Διατεταγμ. N-άδα σφαιριδίων.

Ευνοϊκό αποτέλεσμα = Διατεταγμ. N-άδα σφαιριδίων με x Λευκά.

Δυνατών αποτελ. = $(m+n)^N$



Ευνοϊκών αποτελ. = $\binom{N}{x} m^x n^{N-x}$ =



$$= \frac{N \cancel{n^N}}{\cancel{(m+n)^N}} \frac{m}{\cancel{n}} \frac{(m+n)^{N-1}}{\cancel{n^{N-1}}} =$$

$$= N \frac{m}{m+n}$$

✱ Ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα δημιουργείται σε στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή θέσεων για τα Λευκά → $\binom{N}{x}$ τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθέτηση Λευκών στις θέσεις που επιλ. → m^x τρόποι

3ο στάδιο: Τοποθέτηση Μαύρων → n^{N-x} τρόποι

Άρα,

$$P(X=x) = \frac{\binom{N}{x} m^x n^{N-x}}{(m+n)^N}, \quad x=0,1,2,\dots,N.$$

$$E(x) = \sum_x x\,P(X=x) = \sum_{x=\cancel{0}1}^{N} x \frac{\binom{N}{x} m^x n^{N-x}}{(m+n)^N} =$$

$$= \frac{n^N}{(m+n)^N} \sum_{x=1}^{N} \cancel{x} \frac{N}{\cancel{x}} \binom{N-1}{x-1} \left(\frac{m}{n}\right)^x \overset{x-1=k}{=\!=}$$

$$= \frac{N \cdot n^N}{(m+n)^N} \frac{m}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} \left(\frac{m}{n}\right)^k =$$

$$= \frac{N \cdot n^N}{(m+n)^N} \cdot \frac{m}{n} \cdot \left(1+\frac{m}{n}\right)^{N-1}$$

Διαισθητικά:

$\frac{m}{m+n}$ = Ποσοστό λευκών στην κάλπη

N = Αριθμός Εξαγωγών σφαιριδίων.

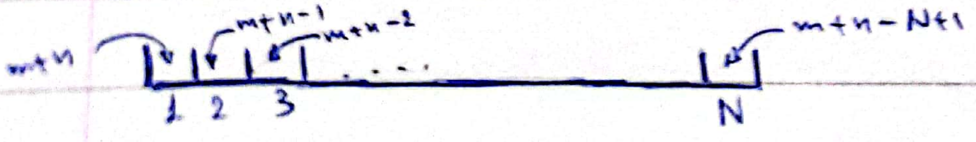
$N\frac{m}{m+n}$ = Αναμενόμενος αριθμός λευκών σε N εξαγωγές

③ Το υπεργεωμετρικό μοντέλο κάλπης

Ίδιο μοντέλο με το διωνυμικό αλλά χωρίς επανάθεση

Ίδια ανάλυση αλλά:

δυνατών αποτελ. = (m+n)



#ευνοϊκών αποτελ. $= \binom{N}{x} (m)_x (m)_{N-x}$

Άρα,

$$P(X=x) = \frac{\binom{N}{x}(m)_x (n)_{N-x}}{(m+n)_N}, \quad x=0,1,2,\ldots,N.$$

$$\frac{N!}{x!(N-x)!}$$

$$= \frac{\binom{m}{x}\binom{n}{N-x}}{\binom{m+n}{N}}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{N} x P(X=x) = \sum_{x=\cancel{0}1}^{N} x \frac{\binom{m}{x}\binom{m}{N-x}}{\binom{m+n}{N}} =$$

$$= \frac{1}{\binom{m+n}{N}} \sum_{x=1}^{N} \cancel{x} \frac{m}{\cancel{x}} \binom{m-1}{x-1}\binom{n}{N-x} \overset{k=x-1}{=\!=}$$

$$= \frac{m}{\binom{m+n}{N}} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \binom{m-1}{k}\binom{n}{N-1-k}}_{\overset{\shortparallel}{\binom{m-1+n}{N-1}}} \longleftarrow \text{Cauchy.} =$$

$$= \frac{m\binom{m+n-1}{N-1}}{\binom{m+n}{N}} = \frac{m\cancel{\binom{m+n-1}{N-1}}}{\frac{m+n}{N}\cancel{\binom{m+n-1}{N-1}}} = N\frac{m}{m+n}$$

④ Θέμα 1 | Σεπτ. 2007

500 άτομα

↳ 100 οικογ. = 1 πατέρας
1 μητέρα
3 παιδιά.

Επιλογή 50 ατόμων.

επιλογών ώστε:

(i) ακριβώς 20 παιδιά.

(ii) ακριβώς 10 μητέρες και 25 παιδιά.

(iii) χωρίς άτομα από την ίδια οικογένεια.

(iv) με τουλάχιστον 1 πατέρα, 1 μητέρα, 1 παιδί.

Λύση:

(i)

$$\underset{\substack{\uparrow\\\text{επιλογή παιδιών.}}}{\binom{300}{20}}\underset{\substack{\uparrow\\\text{επιλογή υπολοίπων.}}}{\binom{200}{30}}$$

(ii)

$$\underset{\substack{\uparrow\\\text{επιλογή μητέρων}}}{\binom{100}{10}}\underset{\substack{\uparrow\\\text{επιλογή παιδιών.}}}{\binom{300}{25}}\underset{\substack{\uparrow\\\text{επιλογή πατεράδων.}}}{\binom{100}{15}}$$

(iii)

$$\binom{100}{50}\underbrace{5\cdot5\cdot\ldots\cdot5}_{50} = \binom{100}{50}5^{50}.$$

(iv) Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού.