19/12/2023

Ασκήσεις

① **Πλήθος συναρτήσεων μεταξύ πεπερασμένων συνόλων**

$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$, $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_\nu\}$, $y_1 < y_2 < \dots < y_\nu$

συναρτ. $f: X \to Y$ με:

(i) χωρίς περιορ.

(ii) 1-1

(iii) γν. αύξουσες

(iv) αύξουσες

(v) γν. φθίνουσες

(vi) φθίνουσες

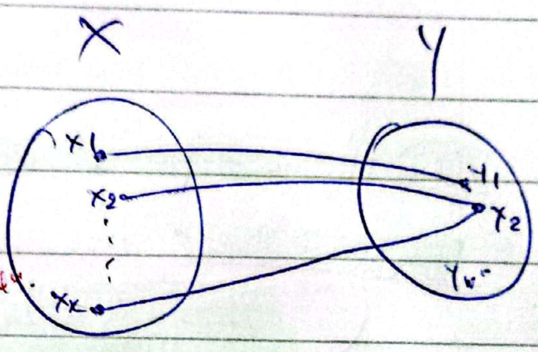
(vii) 1-1 και επί

(viii) αύξουσες και επί.

(ix) επί;

άρα και 1-1 $\Downarrow$ δηλ. χωρίς επανάληψη

$\longrightarrow$ μονοτονία $\Longrightarrow$ συνδυασμοί (διαλέγω εικόνες)



Λύση:

(i) Κάθε συνάρτηση περιγράφεται από μια διατεταγμένη κ-άδα $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k))$.

$\quad\quad\quad\quad \in Y \quad\quad \in Y \quad\quad\quad \in Y$

Από πολλαπλασιαστική αρχή, έχω ν^k συναρτήσεις (# διατ. ν ανά k με επανάληψη).

(ii) Ομοίως με το (i), αλλά $\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1) = (\nu)_k$

(# διατ. ν ανά k χωρίς επανάληψη)

→ Το πως με υποσύνολα εδώ καλύτερα. Με κ-άδα δεν θα δούλευε εύκολα.

(iii) Κάθε αύξουσα συνάρτηση περιγράφεται από ένα υποσύνολο A του Y με k στοιχεία, διότι τότε το $f(x_1)$ θα είναι το μικρότερο στοιχείο του A, το $f(x_2)$ το αμέσως επόμενο, κλπ.

→ Διαλέγω κ στοιχεία y, για να αποτελέσουν εικόνες στοιχείων x

Άρα,

$$\#\underset{\text{γν. αύξ}}{f : \overset{k}{X} \to \overset{v}{Y}} = \#\text{ συνδ. ν ανά κ χωρίς επαναλ} = \binom{v}{k}$$

→ Διαλέγω ποια y "θα παίξουν". Αφού ↑A, το $x_1 \to f(x_1) < f(x_2) \leftarrow x_2$ κλπ

(iv) Ομοίως με το (iii) αλλά το A είναι συνδυασμός με επανάληψη. Άρα,

$$\#\underset{\text{αύξουσα}}{f : \overset{k}{X} \to \overset{v}{Y}} = \#\text{ συνδ. ν ανά κ με επαναλ} = \begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix} = \binom{v+k-1}{k}$$

→ γιατί το ίδιο στοιχείο μπορεί να αποτελεί εικόνα για πάνω από ένα x.

(v) Όπως (iii)

(vi) Όπως (iv)

(vii) Αν $v \neq k$, τότε $\#(f$ 1-1 και επί$) = 0$. → πρέπει ισοπληθικά τα σύνολα

Αν $v = k$, τότε $\#(f$ 1-1 και επί$) = v!$

(viii) $\#\, f : \overset{k}{X} \to \overset{v}{Y}$ αύξουσες και επί = # συνδ. ν ανά κ του $Y = \{y_1, \dots, y_v\}$ με επανάληψη που κάθε y_i εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά

= # ακερ. λύσεων της $z_1 + z_2 + \dots + z_v = k$ (z_i = # εμφ. του y_i) με $z_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, v$. =

($w_i = z_i - 1$) # ακερ. λύσεων της $w_1 + w_2 + \dots + w_v = k - v$ με $w_i \geq 0$ $= \begin{bmatrix} v \\ k-v \end{bmatrix} = \binom{v+k-v-1}{k-v} =$

$= \binom{k-1}{\dots}$

→ Το κάνω αυτό διότι εδώ ξέρω μόνο για ...

(ix) Μια $f: X \to Y$ που είναι επί, προσδιορίζεται από ένα διάνυσμα $(f(x_1), \dots, f(x_k))$, όπου $f(x_1) \in Y$, $f(x_k) \in Y$

κάθε y_i εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά.

Άρα,

$$\#\, f: X^{k} \xrightarrow[\text{επί}]{} Y^{\nu} = $$ # διατάξεων ν ανά k του $Y=\{y_1, \dots, y_\nu\}$ όπου κάθε y_i εμφ. τουλ. 1 φορά.

↳ (*) Όταν βλέπω να ζητείται πλήθος διατάξεων ή συνδυασμών που ανά που μας λένε είναι περιορισμούς του αριθμού των εμφανίσεων ⇒ ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ

1η λύση (με γεννήτριες)

επιτρεπόμενος αριθμός εμφανίσεων.

$$E_j(t, x_j) = \sum_{r_j=1}^{\infty} \frac{(t x_j)^{r_j}}{r_j!}, \quad j=1,2,\dots,\nu$$

$$E_j(t) = E_j(t,1) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = e^t - 1, \quad j=1,2,\dots,\nu.$$

$$E(t) = E_1(t) \cdots E_\nu(t) = (e^t-1)^\nu = (-1)^\nu (1-e^t)^\nu =$$

$$= (-1)^\nu \sum_{r=0}^{\nu} \binom{\nu}{r} (-e^t)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{\nu+r} \binom{\nu}{r} e^{rt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(rt)^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{\nu+r} \binom{\nu}{r} r^k}_{\#\text{ συν. } f: X \to Y \text{ επί}} \frac{t^k}{k!}$$

Μπορούν να αλλάξουν σειρά τα αθροίσματα γτ το ένα (το έξω) είναι πεπερασμένο

Σε αυτό το σειρά είναι.

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=2}^{5} ij = \sum_{i=1}^{3} (2i+3i+4i+5i)$$

Σε τέτοια αυτά και μπορώ να αλλάξω σειρά στα αθροίσματα

→ το σκέφτηκα γε λέει κάθε y_i εμφ. τουλ. 1 φορά, άρα και το y_1 και το y_2 και το y_3 και το .... (όλα δηλ.)
Άρα, κρύβεται ένος πληθάριθμος τομής
Ορίζω αντίθετα τα στοιχεία για να πάρω τομή αποδοχ. ρωτήματων.

2η λύση (με αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού)

Ω = Σύνολο διατάξεων ν ανά κ του $Y = \{y_1, \dots y_\nu\}$.

A_i = Σύνολο Διατάξεων ν ανά κ του Y που το y_i δεν εμφ.

θα γίνεται Τότε, $\# f: X \to Y_{\text{επί}} = N(A_1' \dots A_\nu') =$

αρχή Ε-Α επανάληψη

$$= \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j S_{\nu,j}, \quad \text{όπου} \quad S_{\nu,j} = \underbrace{\sum_{\{i_1,\dots,i_j\} \subseteq \{1,2,\dots,\nu\}} N(A_{i_1} \dots A_{i_j})}_{\binom{\nu}{j}(\nu-j)^k}$$

$(\nu-j)^k$

επαναληπτικές διατάξεις του κάποια (j) στοιχεία δεν εμφανίζονται ανά κ.

Άρα,

$$\# f: X \to Y_{\text{επί}} = \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \binom{\nu}{j} (\nu-j)^k =$$

$(-1)^{\nu-r}(-1)^{2r} = (-1)^{\nu+r}$

$\underline{\nu - j = r}$

$$\sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{\nu-r} \binom{\nu}{\nu-r} r^k =$$

ίσα από συμμετρική ιδιότητα

άλλαξε ως το πολ/πλασιασμό

$$= \underbrace{\sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{\nu+r} \binom{\nu}{r} r^k}$$

(όπως στην 1η λύση)

② Θέμα 3 | Σεπτ 2008 (Ομάδα Α)

→ η πιο δύσκολη που έχει πέσει εξετάσεις στην κατηγορία αθροίσματα.

ⓐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \binom{n}{k} = ;$

ⓑ $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+1}{j} \binom{m+j+1}{2j+1} \frac{(-1)^j}{m+j+1} = ;$ με $m \in \mathbb{N}$

Λύση:

(α)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+2)(n+1)}{(k+2)(k+1)}\binom{n}{k}\frac{(k+1)}{(n+2)(n+1)} =$$

$= \binom{n+2}{k+2}$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}(k+1) =$$

προσπαθώ να τα ταιριάξω

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}\left[(k+2)-1\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}(k+2) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{(n+2)}(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{n+2}{\cancel{k+2}}\binom{n+1}{k+1}\cancel{(k+2)} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}\right]$$

Άρα,

Θέτω $k+1=i$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i} - \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{j=2}^{n+2}\binom{n+2}{j}$$

λείπει το $j=0 \to \binom{n+2}{0}$ και $j=1 \to \binom{n+2}{1} = n+2$

$$= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right) - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2}-1-n-2\right)$$

Όταν έχω ($i=0$ έως $n+1$) → ΣΑΘ το $\binom{n}{k}$ για όλα τα k μου δίνει 2^n. Εδώ έχουμε αυτό απλά λείπει το $i=0$, άρα βγάζω το $\binom{n+1}{0}=1$.

(β)

$$\sum_{j=0}^{\infty}\binom{2j+1}{j}\binom{m+j+1}{2j+1}\frac{(-1)^j}{m+j+1} =$$

ταιριάζουν. Έτσι, τα άνω παραγοντικά για να φύγουν και τα επαναληπτικά

δεν θέλω να έχει συντελεστή καθόδου

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cancel{(2j+1)!}}{j!\,(j+1)!}\cdot\frac{\cancel{(m+j+1)!}}{\cancel{(2j+1)!}\,(m-j)!}\cdot\frac{(-1)^j}{\cancel{m+j+1}} =$$

$(m+j)!$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(m+j)!}{j!\,m!}\cdot\frac{(m+1)!}{(j+1)!\,(m-j)!}\cdot\frac{1}{m+1}(-1)^j =$$

μένει το m! που προκύπτει από τη διαίρεση του 1ου όρου με m!

το πολλαπλασιάζω στο αρχικό

Προσπαθώ να το επαναοργανώσω σε διωνυμικούς συντελεστές.

το γράφω έτσι για να πάω για Cauchy. Θα μπορούσα να το γράψω και $\binom{m+1}{j+1}$.

ότι για $j>m$ είναι όλα ίσα με 0.

Δεν μ' αρέσει, πάντως, γενικώς να έχω επαναληπτικό μαζί με απλό συνδυασμό.

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0} \binom{m+j}{j}\binom{m+1}{m-j}(-1)^j =$$

στο κάτω έτσι με επαναληπτικούς συνδ. για να φύγει το j από πάνω.

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} \underbrace{\binom{m+1+j-1}{j}}_{\left[{m+1 \atop j}\right]}\binom{m+1}{m-j}(-1)^j =$$

$\left[{m+1 \atop j}\right]$ → επαναληπτικός συνδυασμός

Ενώνω το $\left[{m+1 \atop j}\right](-1)^j$ (από θεώρημα προηγούμενο).

Θεώρημα Cauchy

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} \binom{-(m+1)}{j}\binom{m+1}{m-j} = \frac{1}{m+1}\binom{0}{m} =$$

$$= \begin{cases} 1, & m=0 \quad \text{ώστε } \binom{0}{m}=1 \\ 0, & m\neq 0 \quad \text{ώστε } \binom{0}{m}=0. \end{cases}$$