$0, m \neq 0$ γιατί $\binom{0}{m} = 0$.

21/12/2023

Ασκήσεις

① Θέμα 2ο

a = # λύσεων ακεραίων μη-αρνητικών $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} \leq 100$ με $x_i \geq 5$, $i = 1, 2, \dots, 9$ και x_{10} πολ/σιο του 25. και $y_i = x_i - 5$

Λύση:

$a \overset{i=1,2,\dots,9}{=}$ #ακερ. μη αρν. λύσεων της $y_1 + y_2 + \dots + y_9 + x_{10} \leq 55$ με $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 9$ και $x_{10} \geq 0$, πολ/σιο του 25. =

$$= \sum_{x_{10} \in \{0,25,50\}} \left(\begin{matrix} \#\text{ακερ. μη αρν. λύσεων της} \\ y_1+y_2+\dots+y_9 \leq 55-x_{10} \end{matrix} \right) = \begin{matrix} \#\text{ ακερ.} \geq 0 \\ \text{λύσεων } \{y_1,\dots,y_{10}\} \\ \text{με } y_1+\dots+y_{10} = 55-x_{10} \end{matrix} =$$

$$= \sum_{x_{10} \in \{0,25,50\}} \left[\begin{matrix} 10 \\ 55-x_{10} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 10 \\ 55 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 10 \\ 30 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 10 \\ 5 \end{matrix} \right]$$

② Θέμα 2α | Ιανουάριος 2013

- $a =$ #ακερ. μη-αρν. λύσεων $(x_1, x_2, \dots, x_9)$ του συστήματος

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_5+x_6+x_7+x_8+x_9) = 12$$

$$(x_1+x_2+x_3+x_4) + (x_5+x_6+x_7+x_8+x_9) = 7$$

Λύση: Θέτω $\kappa = x_1+x_2+x_3+x_4$ και $\lambda = x_5+x_6+x_7+x_8+x_9$.

Έχω $\kappa\lambda = 12$ και $\kappa+\lambda = 7$. Άρα τα κ, λ είναι ρίζες της

(τύποι Vietta) εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0 \iff (x-3)(x-4) = 0$. Άρα,

$(\kappa, \lambda) = (4,3)$ ή $(\kappa, \lambda) = (3,4)$. Συνεπώς,

$$a = \begin{matrix} \#\text{ακερ.} \geq 0 \text{ λύσεων} \\ (x_1,\dots,x_9) \text{ του } \left\{ \begin{matrix} x_1+\dots+x_4 = 3 \\ x_5+\dots+x_9 = 4 \end{matrix} \right\} \end{matrix} + \begin{matrix} \#\text{ ακερ.} \geq 0 \text{ λύσεων } (x_1,\dots,x_9) \\ \text{του } \left\{ \begin{matrix} x_1+x_2+x_3+x_4 = 4 \\ x_5+\dots+x_9 = 3 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$a = \left[\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right]$$

- $b =$ #ακερ. μη-αρν. λύσεων $(x_1, x_2, \dots, x_7)$ της $(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_5+x_6+x_7) = 40$ με τους περιορ. $0 \leq x_i \leq 8$, $i = 1, 2, \dots, 7$

Λύση: Έστω $\kappa = x_1+x_2+x_3+x_4 \in [0, \overset{32}{4 \cdot 8}] \cap \mathbb{Z}$ και έστω $\lambda = x_1 + x_5 + x_6 + x_7 \in [0, 32] \cap \mathbb{Z}$.

Άρα, από $\kappa\lambda = 49$, έχουμε $\kappa = \lambda = 7$.

Άρα,

$$b = \# \text{ ακερ. μη-αρν. λύσεων } (x_1, \dots, x_7) \text{ του συστήματος } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_5 + x_6 + x_7 = 7 \end{cases} =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{7} \# \text{ ακερ. λύσ. μη-αρν. } (x_2, \dots, x_7) \text{ του } \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 7 - x_1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 7 - x_1 \end{cases} =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{4} \left[\begin{matrix} 3 \\ 7 - x_1 \end{matrix} \right]^2 = \left[\begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix} \right]^2 + \left[\begin{matrix} 3 \\ 6 \end{matrix} \right]^2 + \left[\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right]^2 + \dots + \left[\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right]^2$$

④ Θέμα 2β | Σεπτ 2012

\# ακερ. μη αρν. λύσεων (x_1, x_2, x_3, x_4)

του $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$

Α΄ τρόπος

α) Λύση: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_4 = x_3 + 2 \end{cases}$

Σε κάθε λύση (x_1, x_2, x_3) της $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ αντιστοιχεί

μοναδική λύση $(x_1, x_2, x_3, \underset{\underset{x_3+2}{\parallel}}{x_4})$ του συστήμ. και αντίστροφα

Άρα, έχω $\left[\begin{matrix} 3 \\ 8 \end{matrix} \right]$ λύσεις

του συστήματος

1

Β' τρόπος

$$\text{Ζητούμενο πλήθος} = \sum_{\substack{(x_1,x_2):\, x_1+x_2\le 8 \\ \text{και } x_1,x_2\ge 0}} \#\text{λύσεων του συστήματος } \begin{array}{l} x_3 = 8-x_1-x_2 \\ x_4 = 10-x_1-x_2 \end{array} =$$

$$= \#\text{ μη αρ. ≥0 λύσεων της } x_1+x_2\le 8 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(5) Άσκηση 7 φυλ. eclass (πιο γενική)

Γενικό ερώτημα:

$\#$ συνδ. ν ανά k του $\{1,2,\dots,\nu\}$ όπου υπάρχει κάποιος περιορισμός για την "απόσταση" των στοιχείων. $= ?$

Πχ:

$a = \#$ συνδ. ν ανά k του $\{1,2,\dots,\nu\}$ χωρίς επανάληψη και χωρίς διαδοχικά στοιχεία ← Ασκ. 7 $=$

$= \#$ υποσυνόλων $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\subseteq\{1,2,\dots,\nu\}$ με $i_2-i_1\ge 2$, $i_3-i_2\ge 2$, $\dots$, $i_k-i_{k-1}\ge 2$ $=$

$= \#$λύσεων της εξίσωσης $x_1+x_2+\dots+x_{k+1}=\nu$ με $x_1\ge 1$, $x_i\ge 2$, $i=2,3,\dots,k$, $x_{k+1}\ge 0$ $=$

$$= \begin{bmatrix} k+1 \\ \nu+1-2k \end{bmatrix} = \binom{k+1+\nu+1-2k-1}{\nu+1-2k} = \binom{\nu+1-k}{\nu+1-2k} =$$

$$= \binom{\nu+1-k}{k}$$

Πχ. $\beta = \#$ συνδ. ν ανά κ του $\{1,2,\dots,\nu\}$ χωρίς επανάληψη $=$

$= \#$ υποσυνόλων $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1,2,\dots,\nu\}$ $=$
με $i_2 - i_1 \geq 1,\ i_3 - i_2 \geq 1, \dots, i_k - i_{k-1} \geq 0$

$= \#$ ακερ. ≥ 0 λύσεων της εξίσωσης
$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = \nu$
με $x_i = 1,\ i = 1,2,\dots,k$
$x_{k+1} \geq 0.$
$= \begin{bmatrix} k+1 \\ \nu-k \end{bmatrix} =$

$$= \binom{k+1+\nu-k-1}{\nu-k} = \binom{\nu}{k}$$

Πχ. $\gamma = \#$ συνδ ν ανά κ του $\{1,2,\dots,\nu\}$ με επανάλ. $=$

$= \#$ υποσυν. $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1,2,\dots,\nu\}$ $=$
με $i_2 - i_1 \geq 0,\ i_3 - i_2 \geq 0, \dots, i_k - i_{k-1} \geq 0$

$= \#$ ακερ. ≥ 0 λύσεων της εξίσωσης
$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = \nu$ $=$
με $x_1 \geq 1$
$x_2, \dots, x_{k+1} \geq 0.$

$$= \begin{bmatrix} k+1 \\ \nu-1 \end{bmatrix} = \binom{k+1+\nu-1-1}{\nu-1} =$$

$$= \binom{\nu+k-1}{\nu-1} = \binom{\nu+k-1}{k} = \begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix}$$

(6) Ασκήσεις 4,5,6 φυλλάδιο eclass.

Ένα ασανσέρ ξεκινάει από το ισόγειο κτιρίου με ν ορόφους.
Έχει k διακεκρ. άτομα. Με πόσους τρόπους μπορούν
να κατέβουν τα άτομα στους ορόφους; $= (\alpha)$ (Ασκ. 4)
Το ίδιο αλλά με όμοια κουτιά αντί για ανθρώπους; $= (\beta)$ (Ασκ 5)
Το ίδιο αλλά σε κάθε όροφο πρέπει να αφήσει
τουλάχιστον 2 κουτιά; $= (\gamma)$ (Ασκ 6)

Λύση (α) $= \nu^k$ (# συναρτήσεων: Σύνολο ατόμων $\to$ Σύνολο ορόφων)

ή πολλαπλ. αρχή

1^{o} στ: Όροφος για 1^{o} άτομο $\to$ ν επιλογές.

2^{o} στ.: Όροφος για 2^{o} άτομο $\to$ ν επιλογές

$\vdots$

k^{o} στ: Όροφος για k^{o} άτομο $\to$ ν επιλογές.

(β) $=$ # ακερ. λύσεων της $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = k$ με $x_i \geq 0$

(x_i = # κουτιών για όροφο i) $= \left[\begin{matrix} \nu \\ k \end{matrix} \right]$

(γ) $=$ # ακερ. λύσεων της $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = k$ με $x_i \geq 2$ $= \left[\begin{matrix} \nu \\ k-2\nu \end{matrix} \right] =$

$= \binom{\nu + k - 2\nu - 1}{k - 2\nu}$

Για εξετάσεις

1) Πολλαπλασιαστική Αρχή – Προσθετική Αρχή.
2) Ακερ. λύσεων εξισ. ⟷ Κατανομές ομοίων σφαιρ. σε διακεκρ. κελιά
3) Υπολογισμοί αθροισμάτων.
4) Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού
5) Γεννήτριες