10/10/23

Διατάξεις - Συνδυασμοί - Μεταθέσεις

① Ορισμοί

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$

Μια διάταξη ν ανά κ του Ω είναι μια διατεταγμένη κ-άδα στοιχείων του Ω. $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, k$

"Παίρνω κ από ν στοιχεία και τα βάζω στη σειρά"

Διάταξη

Απλή
(χωρίς επανάληψη)
$a_i \neq a_j$, για $i \neq j$

Επαναληπτική

Διάταξη ≡ Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά

Μια μετάθεση στοιχείων του Ω είναι μια (απλή) διάταξη ν ανα ν

"Βάζω τα ν στοιχεία σε σειρά"

Συνδυασμός ν ανά κ του Ω είναι μια μη-διατεταγμένη συλλογή κ στοιχείων του Ω $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$

"Επιλέγω κ από ν στοιχεία"

Συνδυασμός

Απλός → Επαναληπτικός

Συνδυασμός ≡ Επιλογή στοιχείων

(2) Παράδειγμα

Διατάξεις των $\Omega = \{1,2,3,4\}$

4 ανά 2:

απλές

12	31
13	32
14	34
21	41
23	42
24	43

= 12

επαναληπτικές: απλές + 11, 22, 33, 44 = 16

Μια διάταξη (χωρίς επανάληψη) 4 ανα 2 γίνεται σε 2 στάδια:

1ο: Επιλογή 1ου στοιχείου → 4 τρόποι

2ο: Επιλογή 2ου στοιχείου → 3 τρόποι

Απο πολ/κη αρχή:

διατάξεων 4 ανα 2 $= 4 \cdot 3 = 12$

Ομοίως

επαναλ. διατάξεων 4 ανα 2 $= 4 \cdot 4 = 16$

③ Πλήθος διατάξεων (απλων + Επαν.)

$$\#\text{ διατάξεων } \nu \text{ ανά } k = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-(k-1))$$
$$= \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)$$
$$= \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots 1}{(\nu-k)(\nu-k-1)\cdots 1} = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$$

συμβολ $(\nu)_k = P(\nu,k)$

↳ permutation

Απόδειξη

Μια διάταξη (χωρις επαναλ) ν ανα k γίνεται σε k στάδια:

1ο : Επιλογή 1ου στοιχείου → ν τρόποι

2ο : Επιλογή 2ου στοιχείου → ν-1 τρόποι

3ο : Επιλογή 3ου στοιχείου → ν-2 τρόποι

⋮

kο : Επιλογή kου στοιχείου → $\underbrace{\nu-(k-1)}_{\nu-k+1}$ τρόποι

Άρα απο πολλαπλ. αρχή

$\#$ διατ. ν ανα k $= \nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)$

$\#$ διατάξεων ν ανα k με επανάληψη $= \nu^k$

Απόδειξη

Ίδια με τις απλές διατάξεις αλλά με ν τρόπους σε κάθε στάδιο

$\#$ μεταθέσεων ν στοιχείων $= \nu! = P(\nu) = \dfrac{\nu!}{(\nu-\nu)!} = \dfrac{\nu!}{\underbrace{0!}_{=1}}$

④ Παράδειγμα

Συνδυασμοί 5 ανά 3 του $\{1,2,3,4,5\}$

Απλοί : $\{1,2,3\}$ $\{1,4,5\}$

'' Υποσύνολα $\{1,2,4\}$ $\{2,3,4\}$

$\{1,2,5\}$ $\{2,3,5\}$ $= 10$

$\{1,3,4\}$ $\{2,4,5\}$

$\{1,3,5\}$ $\{3,4,5\}$

Επαναληπτικοί : απλοί $+$ 20 $\begin{cases} \{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,1,4\}, \{1,1,5\} \\ \{2,2,1\}, \{2,2,3\}, \{2,2,4\}, \{2,2,5\} \\ \vdots \\ \{5,5,1\}, \{5,5,2\}, \{5,5,3\}, \{5,5,4\} \end{cases}$

5 $\{ \{1,1,1\}, \{2,2,2\}, \dots, \{5,5,5\}$

$= 35$

Ιδέα : Να συνδέσω #συνδ 5 ανα 3 με το #διαταξ. 5 ανα 3

Από κάθε συνδυασμό 5 ανα 3 προκύπτουν πολλές διατάξεις

συνδυασμοί 5 ανά 3

$\{1,2,3\} \to 123, 132, 213, 231, 312, 321 \to 3! = 6$

$\{1,2,4\} \to 124, 142, 214, 241, 412, 421 \to 3! = 6$

$\vdots$

$\{3,4,5\} \to \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{Διατάξεις 5 ανα 3}}$

Από 1 συνδυασμό 5 ανα 3 έχω 3! διατ. 5 ανα 3

Άρα

$$\left(\underset{5 \text{ ανα } 3}{\#\text{ συνδ}}\right) \cdot 3! = \underset{5 \text{ ανα } 3}{\#\text{ διατάξεων}} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Άρα $\underset{5 \text{ ανα } 3}{\#\text{συνδ}} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \binom{5}{3}$

Δουλεύει η ιδέα για να βρω # επαλ. συνδ 5 ανα 3;

$\{1,2,3\} \rightarrow 6$ διατάξεις

$\{1,1,2\} \rightarrow 3$ διατάξεις (112, 121, 211)

$\{1,1,1\} \rightarrow 1$ διάταξη (111)

(5) Πλήθος συνδυασμών (απλών + επαναλ.)

συνδυασμών ν ανα k = # υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου ν στοιχείων

$$= \frac{\#\text{ διαταξ } \nu \text{ ανα } k}{k!} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!} \overset{\text{συμβ}}{=} \binom{\nu}{k}$$

$= C(\nu, k)$

↑
combination

Απόδειξη

Από 1 συνδυασμό ν ανα k έχω k! διατ. ν ανά k

Άρα $\left(\underset{\nu \text{ ανά } k}{\#\text{ συνδ.}}\right) \cdot k! = \underset{\nu \text{ ανά } k}{\#\text{ διατάξεων}}$

Στο παράδειγμα # συνδ 5 ανά 3 $= \binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 10$

επαναλ. συνδυασμών ν ανα k $= \binom{\nu+k-1}{k} = \frac{(\nu+k-1)!}{k!\,(\nu-1)!}$

↑ Η απόδειξη στο επόμενο μάθημα

$= \left[\begin{matrix} \nu \\ k \end{matrix} \right] \rightarrow$ μη διαδεδομένο

Στο παράδειγμα:

επαναλ συνδ 5 ανα 3 $= \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 35$

6 Σύνοψη

	Απλ	Επαν
Διατ.	$(\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$	ν^k
Συνδ.	$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$	$\binom{\nu+k-1}{k}$

7 Ασκηση

Εχουμε σωματειο 100 ατόμων

διοικ. συμβουλίων με 1 πρόεδρο, 1 αντιπρόεδρο, 1 γραμματέα και 6 απλά μέλη = ;

Λύση

-Ενα ΔΣ γίνεται σε στάδια

1ο: Επιλογή Προέδρου → 100

2ο: Επιλογή Αντιπροέδρου → 99

3ο: Επιλογή Γραμματέα → 98

4^{o} : Επιλογή Υπολ. μελών $\rightarrow \binom{97}{6}$

Απο πολλική αρχή :

$\# \Delta\Sigma = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \frac{97!}{6!\,91!} = \frac{100!}{6!\,91!} = \frac{100 \cdot 99 \cdots 92}{6!}$

Εναλλακτικά:

1^{o} : Επιλέγω τα 9 άτομα του ΔΣ $\rightarrow \binom{100}{9}$

2^{o} : Επιλέγω πρόεδρο του ΔΣ $\rightarrow 9$

3^{o} : Επιλέγω αντιπρόεδρο $\rightarrow 8$

4^{o} : Επιλέγω γραμματέα $\rightarrow 7$

Απο πολλική αρχή

$\# \Delta\Sigma = \binom{100}{9} 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{100!}{9!\,91!} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{100!}{6!\,91!}$

3^{o} τρόπος

1^{o} Βήμα : Επιλέγω μέλη ΔΣ $\rightarrow \binom{100}{9}$

2^{o} Βήμα : Επιλέγω απλά μέλη $\rightarrow \binom{9}{6}$

3^{o} Βήμα : Επιλέγω Π - Α - Γ $\rightarrow 3!$

Πολλική αρχή $\Rightarrow \# \Delta\Sigma = \binom{100}{9}\binom{9}{6} \cdot 3! = \frac{100!}{9!\,91!} \frac{9!}{6!\,3!} 3!$

$= \frac{100!}{6!\,91!}$