12/10/23

Μεταθέσεις s ειδών στοιχείων – Κατανομές σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά

① Παράδειγμα

σφαιρίδια ↑

Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν 2 ○ και 3 ● σε σειρά;

○ ○ ● ● ●
○ ● ○ ● ●
○ ● ● ○ ●
○ ● ● ● ○
● ○ ○ ● ●
● ○ ● ○ ●
● ○ ● ● ○
● ● ○ ○ ●
● ● ○ ● ○
● ● ● ○ ○

↑ 10

② Ορισμός

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$

Μια μετάθεση των s ειδών στοιχείων του Ω όπου το στοιχείο ω_i εμφανίζεται κ_i φορές είναι μια διατεταγμένη $(\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_s)$-άδα στοιχείων του Ω που το ω_i εμφανίζεται κ_i φορές

(ειδική περίπτωση επαναλ. διατ. του Ω)

③ Παράδειγμα (συνέχεια)

Ιδέα: Κάθε σφαιρίδιο έχει νούμερο ○ ○ ● ● ● 1, 2, 3, 4, 5

Τότε από τη μετάθεση 2 ειδών

○ ○ ● ● ● → ① ② ③ ④ ⑤
① ② ③ ⑤ ④
① ② ④ ③ ⑤
① ② ④ ⑤ ③

} 2! 3!

⋮

Από κάθε μετάθεση των 2 ○ και των 3 ● παίρνω 2!3! μεταθέσεις του {1, 2, 3, 4, 5}

Άρα $\left(\begin{matrix}\#\text{ μεταθέσεων} \\ 2○\text{ και }3●\end{matrix}\right) = 2!3! = 5! \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix}\#\text{ μεταθ} \\ 2○\text{ και }3●\end{matrix} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 10$$

④ Τύπος # μεταθ. s ειδών στοιχείων

\# μεταθέσεων s ειδών στοιχείων που το στοιχείο ω_i εμφανίζεται ακριβώς κ_i φορές για $i = 1, 2, \ldots, s$

$$= \frac{(\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_s)!}{\kappa_1!\,\kappa_2!\ldots\kappa_s!}$$

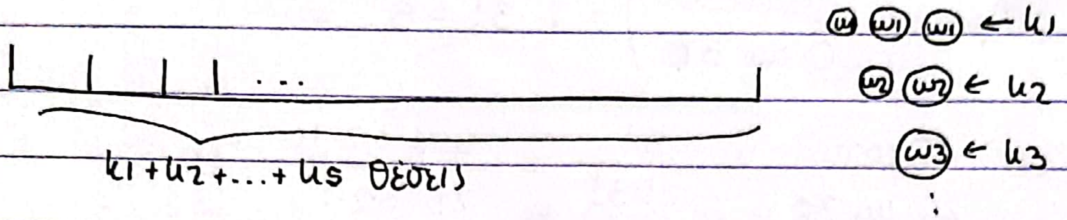
Απόδειξη

Από μια μετάθεση όπου το ω_i εμφανίζεται κ_i φορές παίρνω $\kappa_1!\kappa_2!\ldots\kappa_s!$ συνήθεις μεταθέσεις του $\{\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \ldots, \omega_{1,\kappa_1}, \omega_{2,1}, \omega_{2,2}, \ldots, \omega_{2,\kappa_2}, \cdots \omega_{s,1}, \ldots \omega_{s,\kappa_s}\}$

Άρα $\left(\begin{matrix}\#\text{ μεταθ s ειδών} \\ \text{με }\omega_i \to \kappa_i\text{ φορές}\end{matrix}\right)\cdot\kappa_1!\,\kappa_2!\ldots\kappa_s! = \#\text{ μεταθ του } \{\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \ldots, \omega_{s,\kappa_s}\} = (\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_s)!$

Εναλλακτική απόδειξη

Για να βάλω τα k_1 "ω_1", k_2 "ω_2", ...k_s "ω_s" σε σειρά κάνω 3 στάδια



$1^{\text{ο}}$ στάδιο: Επιλογή θέσεων για τα $\omega_1 \to \binom{k_1+k_2+\ldots+k_s}{k_1}$

$2^{\text{ο}}$ στάδιο: Επιλογή θέσεων για τα $\omega_2 \to \binom{k_2+k_3+\ldots+k_s}{k_2}$

$3^{\text{ο}}$ στάδιο: Επιλογή θέσεων για τα $\omega_3 \to \binom{k_3+k_4+\ldots+k_s}{k_3}$

$\vdots$

$s^{\text{ο}}$ στάδιο: Επιλογή θέσεων για τα $\omega_s \to \binom{k_s}{k_s}$

Απο πολλαπλ. αρχή
\# μεταθ. s ειδών
με $\omega_i \to k_i$ φορές

$$= \overset{\text{Επιλογή θέσεων για } \omega_1 \downarrow}{\binom{k_1+k_2+\ldots+k_s}{k_1}} \overset{\text{Επιλογή θέσεων για } \omega_2 \downarrow}{\binom{k_2+k_3+\ldots+k_s}{k_2}} \cdots \overset{\text{Επιλογή θέσεων για } \omega_s \downarrow}{\binom{k_s}{k_s}}$$

$$= \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_s)!}{k_1!\,\cancel{(k_2+k_3+\ldots+k_s)!}} \cdot \frac{\cancel{(k_2+k_3+\ldots+k_s)!}}{k_2!\,\cancel{(k_3+k_4+\ldots+k_s)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{k_s!}}{k_s!\,0!}$$

$$= \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_s)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!}$$

⑤ Παράδειγμα

αναγραμματισμών = Μεταθέσεις των
(πιθανά χωρίς νόημα)
της λέξης "ΑΛΛΕΠΑΛΛΗΛΕΣ"

$$\begin{matrix} A, & \Lambda, & E, & \Pi, & \Sigma, & H \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{(2+5+2+1+1+1)!}{2!\,5!\,2!\,1!\,1!\,1!} = \frac{12!}{4 \cdot 5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot 6}{\cancel{4}}$$

⑥ Κατανομές σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά

Πρόβλημα:

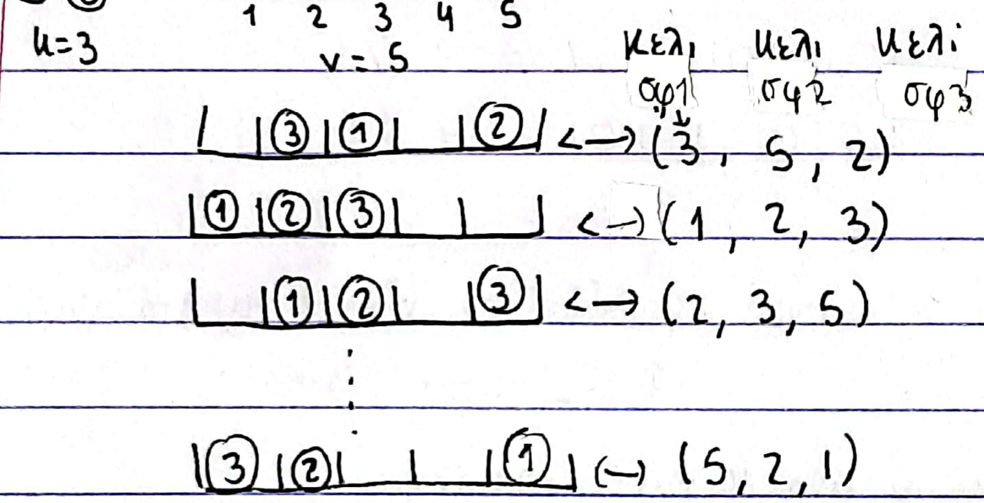
κ σφαιρίδια (διακεκρ/όμοια)

ν διακεκρ. κελιά (μοναδιαίας χωρητικ./άπειρης χωρητ.)

κατανομών = ;

ΣΦΑΙΡΙΔΙΑ	Χωρ 1	Χωρ ∞	
Διακεκρ	$(\nu)_\kappa = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$	ν^κ	Διατάξεις
Ομοια	$\binom{\nu}{\kappa}$	$\left[\begin{matrix}\nu\\ \kappa\end{matrix}\right]$	
	Χωρίς επανάληψη	Με επανάληψη	

Περίπτωση 1: Διακεκρ. σφαιρίδια / κελιά χωρητ. 1

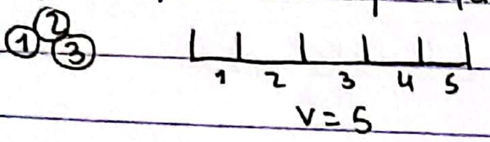


Κατανομές κ διακ. σφαιριδίων σε ν διακ. κελιά χωρ. 1

$\updownarrow$ 1-1 αντιστοιχία

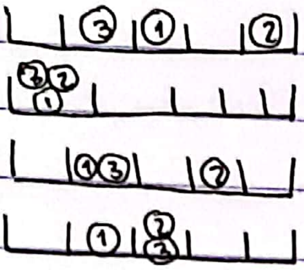
Διατάξεις ν ανά κ χωρίς επανάληψη

Περίπτωση 2: Διακεκρ. σφαιρίδια / κελιά χωρητ. ∞



κελι σφ1 κελι σφ2 κελι σφ3

↓



$\longleftrightarrow$ (3, 5, 2)

$\longleftrightarrow$ (1, 1, 1)

$\longleftrightarrow$ (2, 4, 2)

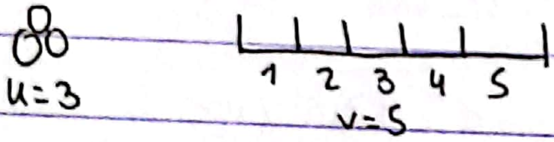
$\longleftrightarrow$ (2, 3, 3)

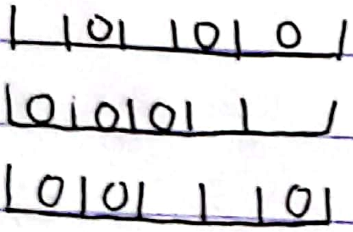
κατανομές κ διακ. σφαιριδίων σε ν διακ. κελιά χωρ. ∞

$\updownarrow$ 1-1 αντιστοιχία

Διατάξεις ν ανα κ με επανάληψη

Περίπτωση 3: Όμοια σφαιρίδια / κελιά χωρητ. 1





$\longleftrightarrow$ {2, 4, 5}

$\longleftrightarrow$ {1, 2, 3}

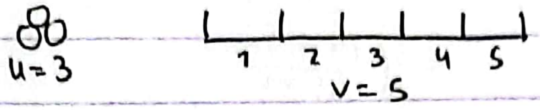
$\longleftrightarrow$ {5, 2, 1}

Κατανομές κ ομοίων σφαιριδίων σε ν διακ. κελιά χωρ. 1

$\updownarrow$ 1-1 αντιστ.

Συνδυασμοί ν ανα κ χωρίς επανάληψη

Περίπτωση 4: Όμοια σφαιρίδια / κελιά χωρητ. ∞



| |0| |0|0| ⟷ {2,4,5}

| |8| |0| | ⟷ {2,2,4}

| | | | |80| ⟷ {5,5,5}

| | |8|0| | ⟷ {3,4,3}

Κατανομές κ ομοίων σφαιριδίων σε ν διακ. κελιά χωρ ∞

$\updownarrow$ 1-1 αντιστοιχία

Συνδυασμοί ν ανά κ με επανάληψη

⑦ Πλήθος συνδυασμών ν ανά κ με επανάληψη

Θεώρημα

\# συνδ ν ανά κ με επανάληψη $\underset{\uparrow \text{ συμβ.}}{=} \left[\begin{matrix}ν\\κ\end{matrix}\right] = \binom{ν+κ-1}{κ} = \frac{(ν+κ-1)!}{κ!\,(ν-1)!}$

πχ. κ=3 ν=5

{2,3,3} ⟷ | |0|00| | |

συνδ 5 ανά 3

κατανομή 3 ομοίων σφαιρ. σε 5 διακ. κελιά άπειρης χωρητ.

⟷ 1 10100111 ⟷ 1010011

ακολουθία από 6 "1" και 3 "0" που αρχίζει και τελειώνει με "1"

Ακολουθία 4 "1" και 3 "0"

Άρα

\# συνδ = \# μεταθ = $\frac{(4+3)!}{4!\,3!}$
5 ανα 3 — 4 "1"
με επαναλ — 3 "0"

Γενικά:

Συνδυασμοί ν ανα κ $\xleftrightarrow[\text{αντιστ.}]{1-1}$ Μεταθέσεις 2 ειδών στοιχείων
με επανάληψη — ν-1 "1", κ "0"

⇒ \# συνδ ν ανα κ με επαναλ. = \# μεταθ ν-1 "1" κ "0" $= \frac{(\nu-1+\kappa)!}{(\nu-1)!\,\kappa!} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}$