17/10/23

Διατάξεις - Συνδυασμοί
Ιδιότητες - Ασκήσεις

① Υπενθυμίσεις

\# διατ. ν ανα k $= (\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$

\# διατ ν ανα k με επαν $= \nu^k$

\# συνδ ν ανα k $= \binom{\nu}{k} = \frac{(\nu)_k}{k!} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$

\# συνδ ν ανα k με επαν $= \left[{\nu \atop k}\right] = \binom{\nu+k-1}{k}$

② Βασική αναγωγική σχέση για $\binom{\nu}{k}$
Τρίγωνο Pascal

$\binom{\nu}{0} = \binom{\nu}{\nu} = 1$, $\binom{\nu}{k} = 0$ για $k>\nu$

$\binom{\nu+1}{k} = \binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1}$

ν \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1
6	1	6	15	20	15	6

Τρίγωνο Pascal

Απόδειξη

Ένα σύνολο Α με ν στοιχεία έχει μοναδικό υποσύνολο με 0 στοιχεία το $\emptyset$.

Άρα $\binom{\nu}{0} = 1$

Έχω μοναδικό υποσύνολο με ν στοιχεία το ίδιο το Α

Άρα $\binom{\nu}{\nu} = 1$

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ σύνολο με $\nu+1$ στοιχεία

Σύνολο υποσυνόλων του Ω με κ στοιχεία $= A$

$$A = B \cup \Gamma$$

B = κ στοιχεία $\left\{ \text{Σύνολο υποσυνόλων του } \Omega \text{ που δεν περιέχουν το } \omega_{\nu+1} \right.$

Γ = κ στοιχεία $\left\{ \text{Σύνολο υποσυνόλων του } \Omega \text{ που περιέχουν το } \omega_{\nu+1} \right.$

$N(A) = N(B) + N(B)$ αφού $B \cap \Gamma = \emptyset$

N = # πλήθος στοιχείων

$N(A) = \binom{\nu+1}{\kappa}$

$N(B) = \binom{\nu}{\kappa}$

Άρα $N(\Gamma) = \binom{\nu}{\kappa-1}$

Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ υποσυνόλων του $\{\omega_1, \dots, \omega_\nu\}$ με $\kappa-1$ στοιχεία και υποσυνόλων του $\{\omega_1, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ με κ στοιχεία που περιέχουν το $\omega_{\nu+1}$

πχ $\binom{100}{45} = \binom{99}{45} + \binom{99}{44}$

$(\nu+1)! = (\nu+1)\nu!$

$\kappa! = \kappa(\kappa-1)!$

$(\nu-\kappa+1)! = (\nu-\kappa+1)(\nu-\kappa)!$

Β' τρόπος (αλγεβρ - κακός)

$\binom{\nu+1}{\kappa} = \binom{\nu}{\kappa} + \binom{\nu}{\kappa-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(\nu+1)!}{\kappa!(\nu+1-\kappa)!} = \dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!} + \dfrac{\nu!}{(\kappa-1)!(\nu-\kappa+1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\nu+1}{\kappa(\nu+1-\kappa)} = \dfrac{1}{\kappa} + \dfrac{1}{\nu-\kappa+1}$

③ Ιδιότητες Τριγώνου Pascal

1] Δίνει τους συντελεστές του $(a+\beta)^\nu$

$(a+\beta)^0 = 1$

$(a+\beta)^1 = 1a + 1\beta$

$(a+\beta)^2 = 1a^2 + 2a\beta + 1\beta^2$

$(a+\beta)^3 = 1a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + 1\beta^3$

$(a+\beta)^\nu = \underbrace{(a+\beta)(a+\beta)\dots(a+\beta)}_{\nu\ \text{παραγ}} = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \overbrace{\dfrac{(\kappa+\nu-\kappa)!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}}^{=\binom{\nu}{\kappa}} a^\kappa \beta^{\nu-\kappa}$

μεταθέσεων 2 ειδών στοιχείων
$a \to \kappa$ φορές
$\beta \to \nu-\kappa$ φορές

Μεταθέσεων 2 ειδών στοιχείων
που το 1ο είδος $\to \kappa_1$ φορές
και το 2ο είδος $\to \kappa_2$ φορές

$= \dfrac{(\kappa_1+\kappa_2)!}{\kappa_1!\kappa_2!}$

$\kappa_1 = \kappa, \quad \kappa_2 = \nu-\kappa$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

Υποσύνολο του Ω με 3 στοιχεία που περιέχουν το ω_4:

$\{\omega_4, \omega_1, \omega_2\} \longleftrightarrow \{\omega_1, \omega_2\}$

$\{\omega_4, \omega_1, \omega_3\} \longleftrightarrow \{\omega_1, \omega_3\}$

$\{\omega_4, \omega_2, \omega_3\} \longleftrightarrow \{\omega_2, \omega_3\}$

κ στοιχεία | κ-1 στοιχεία
κ' υποχρεωτικά το $\omega_{\nu+1}$ | υποσ. του $\{\omega_1, \dots, \omega_\nu\}$

2) Δίνει τα ψηφία του 11^ν

$11^0 = 1$

$11^1 = 11$

$11^2 = 121$

$11^3 = 1331$

$11^4 = 14641$

$11^5 = 161051$

$$11^\nu = (10+1)^\nu = \underbrace{\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} 10^\kappa 1^{\nu-\kappa}}_{\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1}10 + \binom{\nu}{2}10^2 + \dots + \binom{\nu}{\nu}10^\nu}$$

πχ $11^5 = (10+1)^5$

$$= \binom{5}{0} + \binom{5}{1}10 + \binom{5}{2}100 + \binom{5}{3}1000 + \binom{5}{4}10000 + \binom{5}{5}100000$$

$$\binom{5}{0}=1,\quad \binom{5}{1}=5,\quad \binom{5}{2}=10,\quad \binom{5}{3}=10,\quad \binom{5}{4}=5,\quad \binom{5}{5}=1$$

3) Το άθροισμα της γραμμής ν είναι 2^ν

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\dots+\binom{\nu}{\nu}=2^\nu$$

4) Κατακόρυφη αναγωγική σχέση

$$\sum_{j=0}^{\nu}\binom{j}{\kappa} = \binom{0}{\kappa}+\binom{1}{\kappa}+\binom{2}{\kappa}+\binom{3}{\kappa}+\dots+\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu+1}{\kappa+1}$$

Απόδειξη

$$\binom{\nu+1}{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu}{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa+1}$$

$$=\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-2}{\kappa}+\binom{\nu-2}{\kappa+1}=$$

$$=\dots\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa}+\dots+\binom{0}{\kappa}$$

5) Διαγώνια αναγωγική σχέση

$$\sum_{j=0}^{\kappa}\binom{\nu+j}{j}=\binom{\nu}{0}+\binom{\nu+1}{1}+\binom{\nu+2}{2}+\dots+\binom{\nu+\kappa}{\kappa}=\binom{\nu+\kappa+1}{\kappa}$$

Απόδειξη

Ομοίως με την κατακόρυφη αναγωγική σχέση

6) Η άθροιση στις δευτερεύουσες διαγ. είναι οι αριθμοί Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Απόδειξη: Επαγωγικά

④ Αναδρομική σχέση για διατάξεις

$(\nu)_0 = 1$

$(\nu)_\nu = \nu!$

$(\nu)_k = 0 \qquad k > \nu$

$(\nu+1)_k = (\nu)_k + (\nu)_{k-1}$

↑

Διατ του $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$
με k στοιχεία

Μια διάταξη του $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ με $k-1$ στοιχεία πχ η $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ δίνει διατάξεις του $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu+1}\}$ με k στοιχεία που εμφανίζεται υποχρεωτικά το $\omega_{\nu+1}$

$(\omega_{\nu+1}, a_1, \dots, a_{k-1})$

$(a_1, \omega_{\nu+1}, a_2, \dots, a_{k-1})$

$(a_1, a_2, \omega_{\nu+1}, a_3, \dots, a_{k-1})$

$(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \omega_{\nu+1})$