24-10-23

Στοιχεία Πιθανοτήτων

- Ασκήσεις σε διατάξεις και συνδυασμούς

① Κλασσική πιθανότητα

Πείραμα τύχης με ν ισοπίθανα αποτελέσματα $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$: Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυν. αποτελεσμάτων

Αν δεν υπάρχει λόγος να θεωρήσουμε ένα αποτέλεσμα πιο πιθανό από άλλο, λέμε τα $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ ισοπίθανα

Ενδεχόμενο = Υποσύνολο του Ω

Πιθανότητα: Δυναμοσύνολο του $\Omega \to [0,1]$

(κλασική)

$$A \longmapsto P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$$

$P(A)$: πιθανότητα του A

② Παράδειγμα

Πείραμα τύχης: Ρίψη ζαριού

Δειγμ. χώρος = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Πιθαν. ενδεχόμενο = $\frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$

A = "άρτια ζαριά" = $\{2, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

③ Ασκηση

ν ανδρόγυνα : $(A_1, \Gamma_1), (A_2, \Gamma_2), (A_3, \Gamma_3), \ldots, (A_\nu, \Gamma_\nu)$

κ-μελών συμβουλίων στις παρακάτω περιπτώσεις από αυτά τα 2ν άτομα

i) Χωρίς περιορισμό

ii) Με πρόεδρο

iii) Με πρόεδρο γυναίκα

iv) Με πρόεδρο γυναίκα και γραμματέα άνδρα

v) Με ακριβώς r γυναίκες

vi) Με ακριβώς r γυναίκες και χωρίς άτομα απ'το ίδιο ζευγάρι

vii) Χωρίς άτομα απ'το ίδιο ζευγάρι

Λύση

i) $\binom{2\nu}{\kappa}$

ii) Ο σχηματισμός γίνεται σε 2 στάδια

1^{o} : Επιλογή προέδρου → 2ν τρόποι

2^{o} : Επιλογή υπολοίπων → $\binom{2\nu-1}{\kappa-1}$ τρόποι

Απο πολ/κη αρχή : $2\nu\binom{2\nu-1}{\kappa-1}$ συμβούλια

Εναλλακτικά:

1^{o} : Επιλογή μελών συμβουλίου → $\binom{2\nu}{\kappa}$ τρόποι

2^{o} : Επιλογή προέδρου → κ τρόποι

Απο πολ/κη αρχή : $\binom{2\nu}{\kappa}\cdot\kappa$ συμβούλια

Ισχύει ότι $2\nu\binom{2\nu-1}{\kappa-1} = \kappa\binom{2\nu}{\kappa}$

iii) $\nu \cdot \binom{2\nu-1}{\kappa-1}$

- ν: Επιλογή γυναικας προέδρου
- $\binom{2\nu-1}{\kappa-1}$: Επιλογή υπολοίπων

iv) $\nu \cdot \nu \cdot \binom{2\nu-2}{\kappa-2}$

- ν: επιλογή γυναικας προέδρου
- ν: επιλογή αντρα γραμματέα
- $\binom{2\nu-2}{\kappa-2}$: Επιλογή υπολοίπων

v) $\binom{\nu}{r} \cdot \binom{\nu}{\kappa-r}$

- $\binom{\nu}{r}$: Επιλογή γυναικών
- $\binom{\nu}{\kappa-r}$: Επιλογή ανδρών

vi) $\binom{\nu}{r} \cdot \binom{\nu-r}{\kappa-r}$

- $\binom{\nu}{r}$: Επιλογή γυναικών
- $\binom{\nu-r}{\kappa-r}$: Επιλογή ανδρών

vii) 1ος τρόπος

Ένα τέτοιο συμβούλιο γίνονται σε στάδια

1ο : Επιλογή των κ ζευγαριών που θα "εκπροσωπηθούν" $\rightarrow \binom{\nu}{\kappa}$ τρόποι

2ο : Επιλογή Α ή Γ απ'το 1ο ζευγ $\rightarrow$ 2 τρόποι

⋮

$(\kappa+1)$ο : Επιλογή Α ή Γ απ'το κο ζευγ $\rightarrow$ 2 τρόποι

$\# \text{συμβ} = \binom{\nu}{\kappa} 2^{\kappa}$

2^{os} τρόπος

$$\begin{matrix}\text{\# συμβουλίων}\\ \text{με k άτομα}\\ \text{χωρίς άτομα}\\ \text{απ' το ίδιο ζευγ}\end{matrix} = \sum_{r=0}^{k} \begin{matrix}\text{\# συμβ. με}\\ \text{κ άτομα, εκ των οποίων}\\ \text{r γυναίκες και χωρίς}\\ \text{άτομα του ίδιου}\\ \text{ζευγαριού}\end{matrix} = \binom{v}{k}\underbrace{\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}}_{2^k}$$

ιδιότητα τριγώνου Pascal

$$\stackrel{(vi)}{\Longrightarrow} \sum_{r=0}^{k}\binom{v}{r}\binom{v-r}{k-r} = \sum_{r=0}^{k}\frac{v!}{r!\cancel{(v-r)!}}\cdot\frac{\cancel{(v-r)!}}{(k-r)!(v-k)!}$$

$$= \frac{v!}{(v-k)!}\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{r!(k-r)!} = \frac{v!}{k!(v-k)!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!(k-r)!}$$

3^{os} τρόπος

Ένα συμβ τέτοιου τύπου γίνεται σε στάδια

1^o: Επιλογή ατόμου 1 → $2v$ τρόποι

2^o: Επιλογή ατόμου 2 → $2v-2$ τρόποι

⋮

k^o: Επιλογή ατόμου k → $2v-2(k-1)$ τρόποι

$$\#\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{πολ/κη}\\ \text{αρχή}}}{\overset{\text{διατεταγμένων}}{\text{συμβ}}} = 2v(2v-2)(2v-4)\cdots(2v-2(k-1))$$

$$\begin{matrix}\text{\# διατεταγμένων}\\ \text{συμβουλίων}\end{matrix} = \#\text{συμβ}\cdot k! \Rightarrow \#\text{συμβ} = \frac{\#\text{διατετ. συμβ}}{k!}$$

$$= \frac{2v(2v-2)(2v-4)\cdots(2v-2(k-1))}{k!} = \frac{v(v-1)\cdots(v-k+1)}{k!}2^k$$

$$= \frac{v!}{k!(v-k)!}2^k = \binom{v}{k}2^k$$

④ Άσκηση (συνέχεια)

Έχουμε ν ζευγάρια Α - Γ

Επιλέγω k άτομα στην τύχη

$$P\left(\begin{array}{l}\text{υπάρχουν}\\ \text{ακριβώς } r \text{ ζευγ.}\end{array}\right) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{\binom{\nu}{r}\binom{\nu}{k-r}}{\binom{2\nu}{k}}$$

$$P\left(\begin{array}{l}\text{δεν υπάρχουν άτομα}\\ \text{απ' το ίδιο ζευγάρι}\end{array}\right) = \frac{\binom{\nu}{k}\cdot 2^k}{\binom{2\nu}{k}}$$

⑤ Άσκηση (το πρόβλημα των γενεθλίων)

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός ατόμων n ώστε με πιθανότητα $> \frac{1}{2}$ να υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα με ίδια ημερομηνία γενεθλίων (το έτος δεν μας ενδιαφέρει, όλα τα έτη 365 μέρες)

Λύση

Έστω ότι έχουμε n άτομα

$$P\left(\begin{array}{l}\text{τουλάχιστον 2}\\ \text{έχουν γεν. την}\\ \text{ίδια ημερ.}\end{array}\right) = 1 - P\left(\begin{array}{l}\text{όλοι έχουν γενέθλια}\\ \text{σε διαφορετικές μέρες}\end{array}\right)$$

$$= 1 - \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = 1 - \frac{365\cdot 364\cdot 363\ldots(365-n+1)}{365^n}$$

$$= 1 - \frac{(365)_n}{365^n} = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!} = P_n$$

Θέλω το ελάχιστο n ώστε $P_n > \frac{1}{2}$

n	P_n
2	$\frac{1}{365}$
20	0,411
23	0,507 $> \frac{1}{2}$
50	0,970

⑥ Άσκηση (Θέμα 1 Σεπτ. 2012)

\# τοποθετήσεων σε σειρά των $1,2,\dots,10$ στις ακολ περιπτώσεις

α) το 3 να βρίσκεται πριν το 5

β) το 3 να βρίσκεται πριν το 5 και το 5 πριν το 7

γ) το 3 και το 5 να βρίσκονται πριν το 7

δ) οι πρώτες 5 θέσεις να έχουν περιττούς

Λύση

1ος τρόπος (προσθετική + πολ)

α) $\#$ τοποθ με 3 πριν 5 $= \sum_{r=2}^{10}$ # τοποθ με 3 πριν 5 με το 5 στην r θέση

$$= \sum_{r=2}^{10} \underbrace{1}_{\text{τοποθ του } 5} \cdot \underbrace{(r-1)}_{\text{τοποθ του } 3} \cdot \underbrace{8!}_{\text{τοποθ των υπολοίπων}} = 8!\,(1+2+\dots+9) = 8!\,\frac{9\cdot 10}{2} = \frac{10!}{2}$$

2ος τρόπος (συμμετρία)

Μεταθέσεις με 3 πριν το 5 $\xleftrightarrow{1-1}$ Μεταθέσεις το 5 πριν το 3

Άρα # μεταθ με 3 πριν το 5 $= \frac{\#\text{μεταθ}}{2} = \frac{10!}{2}$

3ος τρόπος (πολ/κη αρχή)

1ο στάδιο: Επιλογή θέσεων για 3, 5 $\to \binom{10}{2}$ τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθέτηση υπολοίπων $\to 8!$ τρόποι

Από πολλ/κη αρχή

$$\binom{10}{2}\cdot 8! = \frac{10!}{2!\,8!}\cdot 8! = \frac{10!}{2}$$