7-11-23

Γενικευμένα παραγοντικά - Διωνυμικοί συντελεστές

Γεννήτριες (ακολουθιών)

① Γενικευμένα παραγοντικά

\# διατ. ν ανά k με επαν $= \nu^k$

\# διατ ν ανά $k = (\nu)_k = \underbrace{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}_{k}$, $\nu \geq k$

Θέλουμε να ορίσουμε μια επέκταση του $(\nu)_k$

Θα ορίσουμε το $(x)_k$ για $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$: Θα το λέμε καθοδικό παραγοντικό τάξης k του x

Βασική ιδιότητα του $(\nu)_k$:

$$(\nu)_{k+\lambda} = \underbrace{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}_{(\nu)_k}\underbrace{(\nu-k)(\nu-k-1)\cdots(\nu-k-\lambda+1)}_{(\nu-k)_\lambda}$$

Πως πρέπει να οριστεί το $(\nu)_0$, $(\nu)_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ ώστε να συνεχίσει να ισχύει η ιδιότητα;

$(\nu)_k = (\nu)_{0+k} = (\nu)_0 (\nu-0)_k = (\nu)_0 (\nu)_k$

Άρα πρέπει να ορίσω $(\nu)_0 = 1$

Επίσης,

$1 = (\nu)_0 = (\nu)_{-k+k} = (\nu)_{-k}(\nu-(-k))_k = (\nu)_{-k}(\nu+k)_k$

Άρα πρέπει να ορίσω $(\nu)_{-k} = \dfrac{1}{(\nu+k)_k}$

Ορισμός

Για $x \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1) \quad , k\in\mathbb{Z}, k>0$

$(x)_0 = 1 \quad , k=0$

$(x)_{-k} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} \quad , k\in\mathbb{Z}, k>0$

Παράδειγμα

$(x)_2 = x(x-1)$

$(x)_1 = x$

$(x)_0 = 1$

$(x)_{-1} = \dfrac{1}{x+1}$

$(x)_{-2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

κ.ο.κ

Βασική ιδιότητα

$(x)_{k+\lambda} = (x)_k (x-k)_\lambda \quad , x\in\mathbb{R}, k,\lambda\in\mathbb{Z}$

Ομοίως:

Για $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$ ορίζεται το ανοδικό παραγοντικό k-τάξης του x

$[x]_k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1) \quad , k\in\mathbb{Z}, k>0$

$[x]_0 = 1$

$[x]_{-k} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)} \quad , k\in\mathbb{Z}, k>0$

Βασική ιδιότητα

$[x]_{k+\lambda} = [x]_\lambda [x+k]_\lambda$

② Διωνυμικοί συντελεστές

Ορισμός

Για $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$

$$\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

$$\left[{x \atop k}\right] = \frac{[x]_k}{k!} = \frac{x(x+1)\cdots(x+k-1)}{k!}$$

③ Ιδιότητες

$k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1) = [x-k+1]_k$$
$$= (-1)^k(-x)(-x+1)\cdots(-x+k-1) = (-1)^k[-x]_k$$

Διαιρώντας με $k!$

$$\binom{x}{k} = \left[{x-k+1 \atop k}\right] = (-1)^k\left[{-x \atop k}\right]$$

Ομοίως, $[x]_k = (x+k-1)_k = (-1)^k(-x)_k$

$$\left[{x \atop k}\right] = \binom{x+k-1}{k} = (-1)^k\binom{-x}{k}$$

④ Γεννήτριες

Έστω $(a_\nu) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ ακολουθία.

Ορίζουμε $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

τη γεννήτρια της (a_ν)

(κάτι σαν πολυώνυμο με συντελεστές τους όρους της ακολουθίας

Έστω γεννήτριες:

$$A(t) = \sum_{u=0}^{\infty} a_u t^u = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$$B(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \beta_u t^u = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots$$

$$\Gamma(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \gamma_u t^u = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots$$

1) $A(t) = B(t) \iff a_k = \beta_k, \; k \geq 0$

2) $A(t) = B(t) + \Gamma(t) \iff a_u = \beta_u + \gamma_u, \; k \geq 0$

3) $A(t) = B(t) \cdot \Gamma(t) \iff a_k = \beta_0 \gamma_k + \beta_1 \gamma_{k-1} + \beta_2 \gamma_{k-2} + \dots + \beta_k \gamma_0, \; k \geq 0$

⑤ Βασικές γεννήτριες

$$(a_v) \longleftrightarrow \sum_{u=0}^{\infty} a_u t^u$$

1) $a_k = 1, \; k \geq 0$

$$\sum_{u=0}^{\infty} t^u = \underbrace{1 + t + t^2 + \dots}_{\text{Άθροισμα απείρων όρων γεωμ. προόδου}}$$

$$\sum_{u=0}^{v} t^u = 1 + t^2 + t^3 + \dots + t^v = x$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + t + t^2 + \dots + t^v \\ - \; tx &= \phantom{1 +{}} t + t^2 + \dots + t^v + t^{v+1} \\ \hline (1-t)x &= 1 - t^{v+1} \end{aligned}$$

$$\iff x = \frac{1 - t^{v+1}}{1-t}$$

Άρα $\displaystyle \sum_{u=0}^{v} t^u = \frac{1 - t^{v+1}}{1-t} \to \frac{1}{1-t}$, για $|t| < 1$

Άρα $\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1}$, $|t|<1$

2) Για ν σταθερό

$a_k = \binom{\nu}{k}$, $k \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} t^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k = (1+t)^\nu}_{\substack{\text{Διωνυμικό Θεώρημα} \\ \text{ή Newton}}}$$

Κλασική απόδειξη: Επαγωγή στο ν
(Χρησιμοποιεί το τριγ. Pascal $\binom{\nu}{k} = \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k-1}$)

Συνδυαστική απόδειξη:

$$(1+t)^\nu = \underbrace{(1+t)(1+t)\cdots(1+t)}_{\nu \text{ όροι}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} a_k t^k \longleftarrow \underbrace{\#\text{ όρων } t^{x_1+x_2+\dots+x_\nu} \text{ με } x_1+x_2+\dots+x_\nu = k,\ x_i \in \{0,1\},\ i=1,2,\dots,\nu}_{= \binom{\nu}{k}}$$

3) Για ν σταθερό

$a_k = \left[{\nu \atop k}\right]$, $k \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[{\nu \atop k}\right] t^k = \underbrace{\frac{1}{(1-t)^\nu} = (1-t)^{-\nu}}_{\text{Αρνητικό Διωνυμικό Θεώρημα}}$$

Απόδειξη:

$$(1-t)^{-v} = \underbrace{(1-t)^{-1}(1-t)^{-1}\cdots(1-t)^{-1}}_{v \text{ όροι}}$$

$$= (t^0+t^1+t^2+\ldots)\cdot(t^0+t^1+t^2+\ldots)\cdot(t^0+t^1+t^2+\ldots)$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} a_u t^u$$

a_u: # όρων $t^u = t^{x_1+x_2+\ldots+x_v}$ με $x_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots,v$

$\underbrace{\qquad}$

ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\ldots+x_v = u$, $x_i \geq 0$

$\underbrace{\qquad}_{\displaystyle \left[{v \atop u}\right]}$

Θα θυμόμαστε:

$$\sum_{u=0}^{\infty} t^u = \frac{1}{1-t}$$

$$\sum_{u=0}^{\infty \text{ ή } v} \binom{v}{u} t^u = (1+t)^v$$

$$\sum_{u=0}^{\infty} \left[{v \atop u}\right] t^u = \frac{1}{(1-t)^v}, \quad |t|<1$$

(6) Το πολυωνυμικό θεώρημα

Διωνυμικό Θεώρημα

$$(x_1+x_2)^v = \sum_{u=0}^{v} \binom{v}{u} x_1^{u} x_2^{v-u}$$

$$= \sum_{\substack{u_1,u_2 \geq 0 \\ u_1+u_2=v}} \frac{v!}{u_1!\,u_2!} x_1^{u_1} x_2^{u_2}$$

Πολυωνυμικό Θεώρημα

$$(x_1+x_2+\dots+x_r)^\nu = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r \geq 0 \\ k_1+k_2+\dots+k_r=\nu}} \frac{\nu!}{k_1!\,k_2!\dots k_r!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$$

πχ

$$(x+y+z)^4 = \frac{4!}{4!0!0!} x^4 y^0 z^0 + \frac{4!}{3!1!0!} x^3 y^1 z^0$$

$$+ \frac{4!}{3!0!1!} x^3 y^0 z^1 + \frac{4!}{2!2!0!} x^2 y^1 z^1$$

$$+ \dots$$