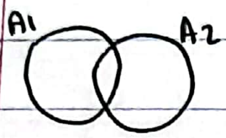
23/11/23

## Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού

### ① Αρχή Ε-Α για 2 σύνολα




$N(A_1 \cup A_2)$

$= N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 A_2)$

**1η απόδειξη:**

συμπλήρωμα του $A_1$

$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1 \cup (A_2 A_1')) = N(A_1) + N(A_2 A_1')$ (1)

ξένα      προσθ. αρχή

Όμως $N(A_2) = N(A_2 A_1' \cup A_2 A_1)$

$= N(A_2 A_1') + N(A_2 A_1)$ ②

(1) κ (2) $\Rightarrow$

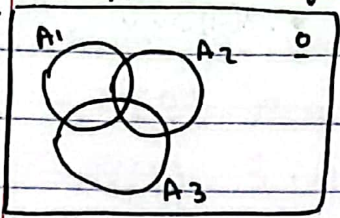
$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 A_2)$

**2η απόδειξη**

Μέτρηση της συνεισφοράς των στοιχείων στα δύο μέλη της ισότητας

| | $N(A_1 \cup A_2)$ | $= N(A_1)$ | $+ N(A_2)$ | $- N(A_1 A_2)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega \in A_1 A_2$ | 1 | 1 | + 1 | − 1 | ✓ |
| $\omega \in A_1 A_2'$ | 1 | 1 | + 0 | − 0 | ✓ |
| $\omega \in A_1' A_2$ | 1 | 0 | + 1 | − 0 | ✓ |
| $\omega \in A_1' A_2'$ | 0 | 0 | + 0 | − 0 | ✓ |

## ② Αρχή Ε-Α για 3 σύνολα




$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= \underbrace{N(A_1) + N(A_2) + N(A_3)}_{=S_{3,1}}$$
$$- \underbrace{\left(N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3)\right)}_{=S_{3,2}}$$
$$+ \underbrace{N(A_1A_2A_3)}_{=S_{3,3}}$$

**Απόδειξη: (1ος τρόπος)**

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1 \cup A_1'A_2 \cup A_1'A_2'A_3)$$

ξένα

$$= N(A_1) + N(A_1'A_2) + N(A_1'A_2'A_3) \quad (1)$$

Επίσης $N(A_2) = N(A_1A_2 \cup A_1'A_2) = N(A_1A_2) + N(A_1'A_2)$

$\Rightarrow N(A_1'A_2) = N(A_2) - N(A_1A_2)$

Τέλος $N(A_3) = N(A_3(A_1 \cup A_2)' \cup A_3(A_1 \cup A_2)) = \dots \quad (3)$

$(1) \cup' (2) \cup' (3)$
$\Longrightarrow$ Αρχή Ε-Α

**Απόδειξη: (2ος τρόπος)**

| $N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$ | $S_{3,1}$ | $-$ | $S_{3,2}$ | $+$ | $S_{3,1}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega \in 3$ συν $1 =$ | 3 | $-$ | 3 | $+$ | 1 | ✓ |
| $\omega \in 2$ συν $1 =$ | 2 | $-$ | 1 | $+$ | 0 | ✓ |
| $\omega \in 1$ συν $1 =$ | 1 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | ✓ |
| $\omega \in 0$ συν $0 =$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | ✓ |

Scanned with CamScanner

③ Αρχή Ε-Α για ν σύνολα

$N(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i}_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu}) = S_{\nu,1} - S_{\nu,2} + S_{\nu,3} - S_{\nu,4} + \ldots + (-1)^{\nu-1} S_{\nu,\nu}$

$= \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r}$

$S_{\nu,r}$ = Άθροισμα των πληθαρίθμων τομών από r σύνολα $\{$ = από τα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$

$\{ = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subseteq \{1,2,\ldots,\nu\}} N(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r}) \leftarrow \binom{\nu}{r}$ όροι

Απόδειξη

$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) = S_{\nu,1} - S_{\nu,2} + S_{\nu,3} - \ldots + (-1)^{\nu-1} S_{\nu,\nu}$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega \in 0$ σω | 0 | $\neq$ | 0 | - 0 | + 0 | 0 |
| $\omega \in 1$ σω | 1 | = | 1 | - 0 | + 0 | 0 |
| $\omega \in 2$ σω | 1 | = | 2 | - 1 | + 0 | 0 |
| ⋮ | | | | | | |
| $\omega \in r$ $(r \geq 1)$ σω | 1 | $\neq$ | r | $- \binom{r}{2}$ | $+ \binom{r}{3}$ | $\ldots (-1)^{r-1} \binom{r}{r} 0 \ldots 0$ |

$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \binom{r}{i}$

$\parallel$

$- \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i = -\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i}_{(1+(-1))^r} - 1\Big)$

④ Πόρισμα

$N(A_1'A_2'\dots A_\nu') = N(\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu))$

$= N(\Omega) - N(A_1 \cup \dots \cup A_\nu)$

$= N(\Omega) - \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r}$

$= \underbrace{N(\Omega)}_{S_{\nu,0}} + \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}$

$= \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}$

⑤ Άσκηση (Θέμα 3 Μαρ 2003)

3 δοκιμασίες ενηλικίωσης A, B, Γ (1η, 2η, 3η)

A = Σύνολο επιτυχόντων στη δοκ. Αρχ

B = Σύνολο επιτυχόντων στη δοκ. Βιο

Γ = Σύνολο επιτυχόντων στη δοκ. Γυμ

1) $N(B) = 2N(A)$

2) $N(\Gamma) = 3N(A)$

3) $N(AB) = N(A\Gamma) = N(B\Gamma)$

4) $N(A \cup B \cup \Gamma) = 46$

5) $N(AB\Gamma) = 1$

6) $N(AB') = 5$

$N(A) = ;\quad N(AB) = ;$

Λύση

$46 \overset{(4)}{=} N(A \cup B \cup \Gamma) \overset{\text{Αρχή Ε-Α}}{=} N(A) + N(B) + N(\Gamma) - N(AB) - N(A\Gamma) - N(B\Gamma) + N(AB\Gamma)$

$\overset{(1)(2)(3)}{=} 6N(A) - 3N(AB) + 1$

$\Rightarrow 6N(A) - 3N(AB) = 45$ ①

$(6) \Rightarrow \quad N(A) - N(AB) = 5 \quad (2)$

(1) κ' (2)

$\Rightarrow N(A) = 10$

$N(AB) = 5$

(6) Άσκηση (Θέμα 3 Σεπτ 2001)

100 φοιτητές εξετάστηκαν σε 3 θέματα $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$

100 γνωρίζουν τουλάχιστον 1 θέμα

70 γνωρίζουν τουλάχιστον 2 θέματα

10 γνωρίζουν και τα 3 θέματα

Κάθε θέμα το γνωρίζει ο ίδιος αριθμός φοιτητών

# φοιτ. που δεν γνωρίζουν το $\Theta_1$

Λύση

$A_i$ = Σύνολο φοιτ. που γνωρίζουν το $\Theta_i$, $i = 1,2,3$

$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 100 \qquad N(\Omega) = 100$

$N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3) = 70$

$N(A_1A_2A_3) = 10$

$N(A_1) = N(A_2) = N(A_3)$

$N(A_1') = ;$

Αρχή Ε-Α $\quad 100 = N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3)$

$- (N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3))$

$+ N(A_1A_2A_3) = 3N(A_1) - (N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3)) + 10$

Άρα $3N(A_1) - (N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3)) = 90$ ①

$70 = N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3)$

$= N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3)$

$- N(A_1A_2A_1A_3) - N(A_1A_2A_2A_3) - N(A_1A_3A_2A_3)$

$+ N(A_1A_2A_1A_3A_2A_3)$

$= N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - 2\underbrace{N(A_1A_2A_3)}_{10}$

Άρα $N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) = 90$ ②

Άρα ① κ' ② $\Rightarrow N(A_1) = 60 \Rightarrow N(A_1') = N(\Omega) - N(A_1) = 40$

2η λύση:

Ακριβώς 10 φοιτητές γνωρίζουν ακριβώς 10 θέματα

Ακριβώς 60 φοιτητές γνωρίζουν ακριβώς 2 θέματα

Ακριβώς 30 φοιτητές γνωρίζουν ακριβώς 1 θέμα

Λυμένα θέματα $= 10 \cdot 3 + 60 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 180$

Άλυτα θέματα $= 300 - 180 = 120$

# φοιτ. που δεν γνωρίζουν το $\Theta_1 = \frac{120}{3} = 40$