30/11/23

Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού

Ασκήσεις

① Παιχνίδι Chuck-a-Luck

Ζάρι ρίχνεται 3 φορές

πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον 1 εξάρι =;

Λύση

$$\text{πιθανότητα} = \frac{\text{ευνοϊκά αποτ}}{\text{δυνατά αποτ.}}$$

Αποτέλεσμα = (x_1, x_2, x_3)

αποτελ 1ης ρίψης, 2ης, 3ης

Ω: Σύνολο δυνατών αποτελ. $N(\Omega) = 6^3$

A_i: Σύνολο αποτελ. στα οποία εμφ. εξάρι στην i-ρίψη, $i=1,2,3$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ Σύνολο ευνοϊκών αποτελ.

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1A_2) - N(A_1A_3) - N(A_2A_3) + N(A_1A_2A_3)$$

$N(A_i) = 6^2 = 36$

$N(A_iA_j) = 6^1 = 6, \; i \neq j$

$N(A_1A_2A_3) = 6^0 = 1$

$$\text{Άρα πιθαν} = \frac{N(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}{N(\Omega)} = \frac{3 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 + 1}{6^3} = \frac{91}{216}$$

B' τρόπος

$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(\Omega) - \underbrace{N(A_1' A_2' A_3')}_{\text{αποτελ. που δεν εμφ. εξάρι}} = 6^3 - 5^3$

Άρα πιθαν $= \dfrac{6^3 - 5^3}{6^3} = \dfrac{216-125}{216} = \dfrac{91}{216}$

② Θέμα 3 / ΦΕΒ 2002

\# αριθμών από το $\{1,2,\dots,2002\}$ που

a) διαιρούνται με τουλάχιστον 1 από τους 6, 10, 15

β) διαιρούνται με ακριβώς 2 από τους 6, 10, 15

Λύση

a) $\Omega = \{1,2,\dots,2002\}$

$A_1 = \{x \in \Omega : 6|x\}$

$A_2 = \{x \in \Omega : 10|x\}$

$A_3 = \{x \in \Omega : 15|x\}$

$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1A_2) - N(A_1A_3) - N(A_2A_3) + N(A_1A_2A_3)$

$= \left[\frac{2002}{6}\right] + \left[\frac{2002}{10}\right] + \left[\frac{2002}{15}\right] - \left[\underset{\uparrow \text{ Εκπ}(6,10)}{\frac{2002}{30}}\right] - \left[\frac{2002}{30}\right] - \left[\frac{2002}{30}\right] + \left[\frac{2002}{30}\right]$

$= 333 + 200 + 133 - 2 \cdot 66 = 534$

β) $\underbrace{\underbrace{N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3)}_{\text{τουλ 2}} - \underbrace{N(A_1A_2A_3)}_{\text{ακριβώς με 3}}}_{\text{ακριβώς με 2}}$

όλοι οι όροι είναι $\left[\frac{2002}{30}\right]$

$= N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_1A_3) - N(A_1A_2A_2A_3) - N(A_1A_3A_2A_3)$
$+ N(A_1A_2A_1A_3A_2A_3) - N(A_1A_2A_3) = 0$

Scanned with CamScanner

③ Θέμα 3 / Νοεμ 2003

20 φορές

- εξαγωγή / καταγραφή / επιστροφή τραπουλόχαρτου από συνηθή τράπουλα 52φ:

A 2 3 … 10 J Q K

♣

♦

♥

♠

Αποτελ = εικοσάδα τραπουλοχ

T = # αποτελ που εμφ και οι 4 A της τραπ. A♣ A♦ A♥ A♠ = ;

Λύση

Ω = Σύνολο αποτελ. = $\{(x_1, x_2, \dots, x_{20}) : x_i \in$ τράπουλα $\}$

$N(\Omega) = 52^{20}$

A_1 = Σύνολο αποτελ. που δεν εμφ ο A♣

A_2 = Σύνολο αποτελ. που δεν εμφ ο A♦

A_3 = Σύνολο αποτελ. που δεν εμφ ο A♥

A_4 = Σύνολο αποτελ. που δεν εμφ ο A♠

$T = N(A_1' A_2' A_3' A_4')$

Από αρχή Ε-Α

$N(A_1' A_2' A_3' A_4') = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r S_{4,r}$

$S_{4,0} = N(\underline{0}) = 52^{20}$

$S_{4,1} = \sum_{i=1}^{4} N(A_i) = \binom{4}{1} 51^{20}$

$S_{4,2} = \binom{4}{2} 50^{20}$

$S_{4,3} = \binom{4}{3} 49^{20}$

$S_{4,4} = \binom{4}{4} 48^{20}$

Άρα $T = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r \binom{4}{r} (52-r)^{20}$

<u>Λάθος Λυση</u>

Χρήση πολ/λης αρχής

1° Βήμα: Επιλ. θέσης για το A♣ → 20 θέσεις

2° Βήμα: Επιλ. θέσης για το A♦ → 19

3° Βήμα: Επιλ θέσης για το A♥ → 18

4° Βήμα: Επιλ θέσης για το A♠ → 17

5° Βήμα: Επιλ θέσης υπολοίπων → 52^{16}

τρόπων $= 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 52^{16}$ $\boxed{\text{Λάθος}}$

Το λάθος είναι ότι έχουν γίνει "διπλομετρήσεις"

πχ το αποτελ

$(A♣, A♦, A♥, A♠, A♥, 2♦, \underbrace{2♦, 2♦, \ldots, 2♦}_{15})$

προκύπτει: 1° Β. A♣ → 1η θέση

2° Β. A♦ → 2η θέση

3° Β: A♥ → 3η θέση

4° Β: A♠ → 4η θέση

5^{o} Θ: Α ♡ → 5^{η}, 2♦ στις 6^{η} − 20^{η} ή Α♡ → 3^{η}, 2♦ στις υπόλοιπες

④ Θέμα 3 / Μαρ 2004

τρόπων να γράψουμε λέξη (πιθανά χωρίς νόημα) με 6 γράμματα από το αλφάβητο {Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι} ώστε να εμφαν όλα τα φωνήεντα.

Λύση

Ίδιο μοντέλο με πριν

52 τραπ ⟷ 9 αλφαβ

20 εξαγ ⟷ 6 Μήκος λέξης

4 Άσσοι ⟷ 4 φων

$$\# = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r \binom{4}{r} (9-r)^6$$

⑤ Θέμα 3 / Σεπτ 2005

Κατασκευάζουμε 6-ψήφιο αριθμό επιλέγοντας ψηφία από τα 1, 2, ..., 7

α) Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν; 7^6

β) Πόσοι από αυτούς περιέχουν τα ψηφία 1, 2, 3;

Λύση

β) Ίδιο μοντέλο με πριν

52 τραπ ⟷ 7 Αριθμ {1, 2, ..., 7}

20 εξαγ ⟷ 6 Μήκος αριθμού

4 Άσσοι $\leftrightarrow$ 3 ψηφία 1,2,3

$$\# = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r \binom{3}{r} (7-r)^6$$

⑥ Θέμα 3 / Σεπτ 2012

3Α, 3Β, 3Γ

α) # τρόπων τοποθέτησης σε σειρά =;

β) # τρόπων τοπ. σε σειρά ώστε τα 3Α να είναι συνεχόμενα =;

γ) # τρόπων τοποθέτησης σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν 3 όμοια συνεχόμενα γράμματα =;

Λύση

α) Μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων

$A \to k_1 = 3$ φορές

$B \to k_2 = 3$ φορές

$\Gamma \to k_3 = 3$ φορές

$$= \frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} = \frac{9!}{(3!)^3}$$

β) Μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων

$AAA \to k_1 = 1$ φορά

$B \to k_2 = 3$ φορές

$\Gamma \to k_3 = 3$ φορές

$$= \frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} = \frac{7!}{1!\,3!\,3!} = \frac{7!}{(3!)^2} = 7 \cdot \frac{(3+3)!}{3!\,3!}$$

Επιλέγω θέση για το αρχ Α

Β, Γ

γ) Ω = Λέξεις με 3Α, 3Β, 3Γ $\quad N(\Omega) \overset{(\alpha)}{=} \frac{9!}{(3!)^3}$

Ζητ $\# = N(A_1' A_2' A_3')$

όπου A_1: λέξεις που τα 3Α είναι σε σειρά

A_2: λέξεις που τα 3Β είναι σε σειρά

A_3: λέξεις που τα 3Γ είναι σε σειρά

$$N(\Omega) = \frac{(3+3+3)!}{3!\,3!\,3!} = \frac{9!}{(3!)^3}$$

$$N(A_1) = N(A_2) = N(A_3) \overset{(B)}{=} \frac{(1+3+3)!}{1!\,3!\,3!} = \frac{7!}{(3!)^2}$$

$$N(A_1A_2) = N(A_1A_3) = N(A_2A_3) = \frac{(1+1+3)!}{1!\,1!\,3!} = \frac{5!}{3!}$$

$$N(A_1A_2A_3) = 3!$$

Άρα ζητούμενο πλήθος $= \dfrac{9!}{(3!)^3} - 3\dfrac{7!}{(3!)^2} + 3\dfrac{5!}{3!} - 3!$