5/12/23

Γεννήτριες Συνδυασμών

① Βασικό πρόβλημα

συνδυασμών ν ανά k του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ όπου το ω_i εμφανίζεται r_i φορές με $r_i \in A_i$ όπου A_i, $i = 1, 2, \dots, \nu$ είναι δοσμένα σύνολα

② Παράδειγμα

συνδυασμών 4 ανά k του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ όπου

ω_1 εμφανίζεται 1 ή 2 ή 3 φορές

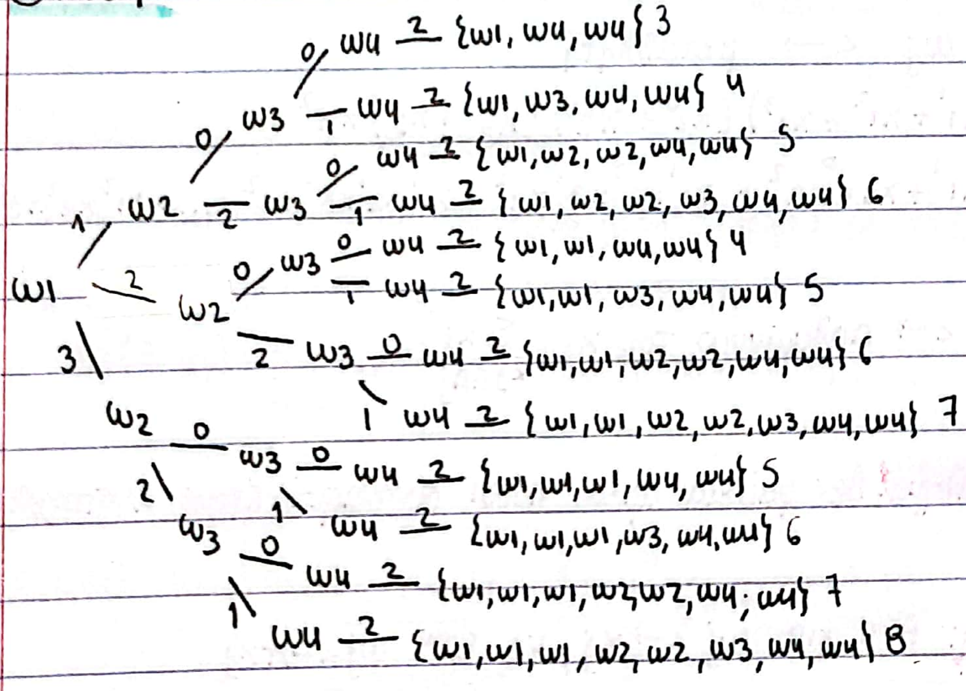
ω_2 εμφανίζεται 0 ή 2 φορές

ω_3 εμφανίζεται το πολύ 1 φορά

ω_4 εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές

$(A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{0,2\}, A_3 = \{0,1\}, A_4 = \{2\})$

③ Λύση



συνδ. 4 ανά k με τους περιορ.

k	
0	0
1	0
2	0
3	1
4	2
5	3
6	3
7	2
8	1
9	0
10	0

④ Αλγεβροποίηση της διαδικασίας

Δένδρο <—> Αλγεβρ. παράσταση

ω_j <—> μεταβλητή

$$(x_1^1+x_1^2+x_1^3)(x_2^0+x_2^2)(x_3^0+x_3^1)x_4^2$$

$$= x_1^1x_2^0x_3^0x_4^2 + x_1^1x_2^0x_3^1x_4^2 + x_1^1x_2^1x_3^0x_4^2 + \dots + x_1^3x_2^2x_3^1x_4^2$$

A_j <—> πολυώνυμο του x_j: $\sum_{r_j \in A_j} x_j^{r_j}$

Πρόβλημα! Δεν φαίνεται άμεσα πόσοι συνδυασμοί έχουν k στοιχεία

Λύση: Αντί για ω_j <—> x_j, να έχω ω_j <—> tx_j

Τότε $((tx_1)^1+(tx_1)^2+(tx_1)^3)((tx_2)^0+(tx_2)^2)((tx_3)^0+(tx_3)^1)(tx_4)^2$
$= t^3x_1^1x_2^0x_3^0x_4^2 + t^4x_1^1x_2^0x_3^1x_4^2 + t^5x_1^1x_2^2x_3^0x_4^2$
$+ \dots + t^8x_1^3x_2^2x_3^1x_4^2$

Με ενδιαφέρει όμως το πόσοι είναι οι συνδυασμοί όχι ποιοι.
Μπορεί να απλοποιηθεί η διαδικασία;

Λύση: Ναι, βάζοντας όλα τα $x_j = 1$
Άρα
$(t^1+t^2+t^3)(t^0+t^2)(t^0+t^1)t^2 = t(1+t+t^2)(1+t^2)(1+t)t^2$
$= t(1+t+2t^2+t^3+t^4)(1+t)t^2$
$= t^3(1+t+2t^2+t^3+t^4$
$\quad + t + t^2 + 2t^3 + t^4 + t^5)$
$= t^3(1+2t+3t^2+3t^3+2t^4+t^5)$
$= 1t^3+2t^4+3t^5+3t^6+2t^7+1t^8$
Ο συντελεστής του t^4 δίνει το # συνδ 4 ανά k με τους περιορ.

⑤ Συστηματοποίηση διαδικασίας

συνδ. ν ανά k που το w_i εμφανίζεται r_i φορές με $r_i \in A_i$, $i=1,2,\dots,v$

B1| $w_j \leftrightarrow tx_j$ — Απαριθμήτρια

$A_j(t,x_j) = \sum_{r_j \in A_j} (tx_j)^{r_j}$ — συνάρτηση του x_j

B2) $A_j(t) = A_j(t,1)$

B3) $\underbrace{A(t) = A_1(t)A_2(t)\cdots A_v(t)}_{\text{" Γεννήτρια Συνδυασμών}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \hookrightarrow$ # συνδ ν ανά k με περιορισμούς

⑥ Βασικές γεννήτριες

$$(1+t)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu \text{ ή } \infty} \binom{\nu}{k} t^k$$

$$(1-t)^{-1} = \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad |t|<1$$

$$(1-t)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{\nu \atop k} \right] t^k$$

⑦ Θέμα 4 / Σεπτ 2012

a_k = # επαναλ. συνδ των $\nu+2$ στοιχείων του Ω ανά k

($\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu+1}\}$) όπου

ω_0 επιτρέπεται περιττό αριθμό φορών

$\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται 1 ή 2 φορές

Τα υπόλοιπα οσεσδήποτε φορές

Λύση

Β1| $A_0(t, x_0) = (tx_0)^1 + (tx_0)^3 + (tx_0)^5 + \dots$

$$A_j(t, x_j) = \sum_{r_j=0}^{\infty} (tx_j)^{r_j}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu$$

$$A_{\nu+1}(t, x_{\nu+1}) = (tx_{\nu+1})^1 + (tx_{\nu+1})^2$$

Β2| $A_0(t) = t^1 + t^3 + t^5 + \dots = t \cdot \frac{1}{1-t^2}$

$$= t(t^0 + t^2 + t^4 + \dots)$$

$$= t \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} = t \sum_{k=0}^{\infty} (t^2)^k$$

$A_j(t) = \sum_{u=0}^{\infty} t^u = \frac{1}{1-t}, \; j=1,2,\dots,\nu$

$A_{\nu+1}(t) = t^1 + t^2 = t(1+t)$

<u>B3)</u> Γεννήτρια συνδ.

$A(t) = t \cdot \frac{1}{1-t^2} \cdot \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\nu} + (1+t)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{u=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \quad \sum_{u=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu \\ u \end{matrix}\right] t^u = \frac{1}{(1-t)^{\nu}} \\ &\sum_{u=0}^{\nu} \binom{\nu}{u} t^u = (1+t)^{\nu} \end{aligned}}$$

<u>B4)</u> $A(t) = t^2 \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\nu+1} = t^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu+1 \\ j \end{matrix}\right] t^j$

$= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu+1 \\ j \end{matrix}\right] t^{j+2} \underset{=}{\overset{u=j+2}{}} \sum_{u=2}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu+1 \\ u-2 \end{matrix}\right] t^u$

Άρα $a_k = \begin{cases} 0, & \text{για } k=0,1 \\ \left[\begin{matrix} \nu+1 \\ u-2 \end{matrix}\right] & \text{για } k \geq 2 \end{cases}$

⑧ Θέμα 4/Σεπτ 2011

a_k = # επαναλ συνδ των $2v+2$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2v+2}\}$

ανά k, όπου

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2v+1}$ εμφανίζεται το πολύ 1 φορά το καθένα

ω_{2v+2} εμφ. άρτιο αριθμό φορών

α) Γεννήτρια $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t)$

β) $a_k - a_{k-1} = ;$

γ) $a_v = ;$

α) <u>Β1)</u> $A_j(t, x_j) = (tx_j)^0 + (tx_j)^1, \quad j = 1, \dots, 2v+1$

$A_{2v+2}(t, x_{2v+2}) = \sum_{\substack{r=0 \\ r\ \text{άρτιο}}}^{\infty} (t\, x_{2v+2})^r$

<u>Β2)</u> $A_j(t) = 1+t, \quad j = 1, 2, \dots, 2v+1$

$A_{2v+2}(t) = 1 + t^2 + t^4 + \dots = \frac{1}{1-t^2}$

$A(t) = A_1(t)\, A_2(t) \dots A_{2v+2}(t) = (1+t)^{2v+1} \cdot \frac{1}{1-t^2} = (1+t)^{2v} \cdot \frac{1}{1-t}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2v}{k} t^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} t^k$

Υπενθύμιση:

$A(t) = B(t) \cdot \Gamma(t)$

$\Leftrightarrow a_k = B_0 \gamma_k + B_1 \gamma_{k-1} + B_2 \gamma_{k-2} \dots B_k \gamma_0$

Άρα $a_k = \binom{2v}{0} \cdot 1 + \binom{2v}{1} 1 + \dots + \binom{2v}{k} 1 = \sum_{i=0}^{k} \binom{2v}{i}$

β) $a_k - a_{k-1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{2v}{i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2v}{i} = \binom{2v}{k}$

γ) $a_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{2\nu}{i} = \binom{2\nu}{0} + \binom{2\nu}{1} + \binom{2\nu}{2} + \dots + \binom{2\nu}{\nu} = S$

Αυτό το έχουμε υπολογίσει στα αθροίσματα με συμμετρία

$$2S = \binom{2\nu}{0} + \binom{2\nu}{1} + \dots + \binom{2\nu}{\nu-1} + \binom{2\nu}{\nu}$$
$$+ \binom{2\nu}{2\nu} + \binom{2\nu}{2\nu-1} + \dots + \binom{2\nu}{\nu+1} + \binom{2\nu}{\nu}$$
$$= 2^{2\nu} + \binom{2\nu}{\nu}$$

Άρα $a_\nu = \dfrac{2^{2\nu} + \binom{2\nu}{\nu}}{2}$