7/12/23

## Γεννήτριες Διατάξεων

① Παράδειγμα (βλ. προηγ. μαθ)

$a_k$ = # συνδ. 4 ανα k του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ με τους περιορ.

$\omega_1$ εμφ. 1, 2 ή 3 φορές
$\omega_2$ εμφ. 0 ή 2 φορές
$\omega_3$ εμφ 0 ή 1 φορά
$\omega_4$ εμφ 2 φορές

ίδιους περιορ

$B_k$ = # διατάξεων 4 ανα k με ίδιους περιορισμούς

Για το $a_k$:

$\omega_j \leftrightarrow t^{x_j}$
$\omega_j \leftrightarrow A_j(t, x_j)$

$$\left.\begin{aligned}
A_1(t,x_1) &= (tx_1)^1+(tx_1)^2+(tx_1)^3\\
A_2(t,x_2) &= (tx_2)^0+(tx_2)^2\\
A_3(t,x_3) &= (tx_3)^0+(tx_3)^1\\
A_4(t,x_4) &= (tx_4)^2
\end{aligned}\right\}\text{απαριθμήτριες}$$

$$A_1(t,x_1)A_2(t,x_2)A_3(t,x_3)A_4(t,x_4)$$

$$=\underbrace{t^3}_{\#\text{στοιχ.}}\underbrace{x_1^1x_2^0x_3^0x_4^2}_{\{w_1,w_4,w_4\}}+\dots+t^7\underbrace{x_1^3x_2^2x_3^0x_4^2}_{\{w_1,w_1,w_1,w_2,w_2,w_4,w_4\}}+\dots+t^8\underbrace{x_1^3x_2^2x_3^1x_4^2}_{\{w_1,w_1,w_1,w_2,w_2,w_3,w_4,w_4\}}$$

Αν βάλω $x_1=x_2=x_3=x_4$, ο συντελεστής του $t^4$ δίνει το $a_4$

Πώς να τροποποιήσω την ιδέα για να δίνει διατάξεις;

Θα θέλαμε αντί $x_1^1x_2^0x_3^0x_4^2 \longrightarrow \frac{3!}{1!0!0!2!}x_1^1x_2^0x_3^0x_4^2$

$$x_1^3x_2^2x_3^0x_4^2 \longrightarrow \underbrace{\frac{7!}{3!2!0!2!}}_{\text{Μεταθέσεις ν ειδών στοιχ.}}x_1^3x_2^2x_3^0x_4^2$$

**Ιδέα**

Για να εμφανίζονται τα παραγοντικά στον παρανομαστή διαιρώ κάθε $(tx_j)^r$ με $r!$ δηλαδή

Θεωρώ

$$E_1(t,x_1)=\frac{(tx_1)^1}{1!}+\frac{(tx_1)^2}{2!}+\frac{(tx_1)^3}{3!}$$

$$E_2(t,x_2)=\frac{(tx_2)^0}{0!}+\frac{(tx_2)^2}{2!}$$

$$E_3(t,x_3)=\frac{(tx_3)^0}{0!}+\frac{(tx_3)^1}{1!}$$

$$E_4(t,x_4)=\frac{(tx_4)^2}{2!}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Τότε $E_1(t,x_1)E_2(t,x_2)E_3(t,x_3)E_4(t,x_4)$

$$= \frac{t^3}{3!}\frac{3!}{1!0!0!2!}x_1^1x_2^0x_3^0x_4^2 + \dots + \frac{t^7}{7!}\frac{7!}{3!2!0!2!}x_1^3x_2^2x_3^0x_4^2 + \dots + \frac{t^8}{8!}\frac{8!}{3!2!1!2!}x_1^3x_2^2x_3^1x_4^2$$

Για να βρω το $B_k$ (# διατάξεων) θέτω $x_j=1$ για όλα τα $j$ και διαβάζω τον συντελεστή του $\frac{t^k}{k!}$

## ② Γενική διαδικασία

$B_k$ = # διατάξεων ν ανά k του $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu\}$ με περιορ. $\omega_j$ επιτρέπεται να εμφανίζεται $r_j$ φορές

με $r_j \in A_j$, $j=1,2,\dots,\nu$

αλλά

**B1]** $\omega_j \longleftrightarrow E_j(t,x_j) = \sum_{r_j\in A_j}\frac{(tx_j)^{r_j}}{r_j!}$, $j=1,2,\dots,\nu$

**B2]** $E_j(t)=E_j(t,1)$, $j=1,2,\dots,\nu$

**B3]** $E(t)=E_1(t)E_2(t)\dots E_\nu(t)$ Εκθετική Γεννήτρια Διατάξεων

**B4]** $E(t)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{t^k}{k!}$ # διατ.

## ③ Βασικές Γεννήτριες

1] $\sum_{k=0}^{\infty}t^k=\frac{1}{1-t}$, $|t|<1$

2] $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{matrix}\nu\\k\end{matrix}\right]t^k=\frac{1}{(1-t)^\nu}$, $|t|<1$

Σαρώθηκε με το CamScanner

3) $\sum_{u=0}^{\nu} \binom{\nu}{u} t^u = (1+t)^\nu$

4) $\sum_{u=0}^{\infty} \frac{t^u}{u!} = e^t$ $\quad e^t = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{nt} = 1 + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$

(4) Παραδείγματα (που ήδη ξέραμε)

1) $a_k$ = # συνδ ν ανά k χωρίς επαναλ =;

B1) $A_j(t, x_j) = (tx_j)^0 + (Ax_j)^1$, $j = 1, 2, \dots, \nu$

B2) $A_j(t) = t^0 + t^1 = 1+t$, $j = 1, 2, \dots, \nu$

B3) $A(t) = A_1(t) A_2(t) \dots A_\nu(t) = (1+t)^\nu$

B4) $A(t) = (1+t)^\nu = \sum_{u=0}^{\nu} \binom{\nu}{u} t^u$

Άρα $a_u = \begin{cases} \binom{\nu}{u}, & 0 \le u \le \nu \\ 0, & u \geq \nu+1 \end{cases}$

2) $a_k$ = # συνδ ν ανά k με επανάληψη =;

B1) $A_j(t, x_j) = \sum_{r_j=0}^{\infty} (tx_j)^{r_j}$, $j = 1, 2, \dots, \nu$

B2) $A_j(t) = \sum_{r_j=0}^{\infty} t^{r_j} = \frac{1}{1-t}$, $j = 1, 2, \dots, \nu$

B3) $A(t) = A_1(t) A_2(t) \dots A_\nu(t) = \frac{1}{(1-t)^\nu}$

B4) $A(t) = \frac{1}{(1-t)^\nu} = \sum_{u=0}^{\infty} \left[ \nu \atop u \right] t^u$ Άρα $a_u = \left[ \nu \atop u \right]$

Σαρώθηκε με το CamScanner

3) $B_u = \#$ διατ $\nu$ ανα $k$ χωρίς επαναλ =;

B1] $E_j(t, x_j) = \frac{(tx_j)^0}{0!} + \frac{(tx_j)^1}{1!}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$

B2] $E_j(t) = 1+t$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$

B3] $E(t) = E_1(t)E_2(t)\ldots E_\nu(t) = (1+t)^\nu$

B4] $E(t) = (1+t)^\nu = \sum_{u=0}^{\nu} \binom{\nu}{u} t^u = \sum_{u=0}^{\nu} u! \binom{\nu}{u} \frac{t^u}{u!}$

Άρα $B_u = \begin{cases} u!\binom{\nu}{u}, & 0 \le u \le \nu \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\nu!}{(\nu-u)!}, & 0 \le u \le \nu \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

4) $B_u = \#$ διατ $\nu$ ανα $k$ με επαναλ =;

B1] $E_j(t, x_j) = \sum_{r_j=0}^{\infty} \frac{(tx_j)^{r_j}}{r_j!}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$

B2] $E_j(t) = \sum_{r_j=0}^{\infty} \frac{t^{r_j}}{r_j!} = e^t$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$

B3] $E(t) = E_1(t)E_2(t)\ldots E_\nu(t) = (e^t)^\nu = e^{\nu t}$

B4] $E(t) = e^{\nu t} = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^u}{u!} = \sum_{u=0}^{\infty} \nu^u \frac{t^u}{u!}$

Άρα $B_u = \nu^u$

Σαρώθηκε με το CamScanner

⑤ Θέμα 4/ Μαρ 2012

$a_u$ = # επαναλ. διατάξεων των $v+1$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_v\}$ ανά k, όπου

το $\omega_0$ επιτρέπεται άρτιο αριθμό φορών και τα υπόλοιπα χωρίς περιορ.

$E(t) = \sum_{u=0} a_u \frac{t^u}{u!}$ ;

$a_u =$ ;

Λύση

B1] $E_0(t, x_0) = \frac{(tx_0)^0}{0!} + \frac{(tx_0)^2}{2!} + \frac{(tx_0)^4}{4!} + \dots$

$E_j(t, x_j) = \sum_{r_j=0}^{\infty} \frac{(tx_j)^{r_j}}{r_j!}$

B2] $E_0(t) = \sum_{\substack{r_j=0 \\ r_j \text{ άρτιος}}}^{\infty} \frac{t^{r_j}}{r_j!} = S_a$

$\sum_{\substack{r_j=0 \\ r_j \text{ περιττός}}}^{\infty} \frac{t^{r_j}}{r_j!} = S_n$

$$S_a + S_n = \sum_{r_j=0}^{\infty} \frac{t^{r_j}}{r_j!} = e^t$$

$$S_a - S_n = \sum_{r_j=0}^{\infty} (-1)^{r_j} \frac{t^{r_j}}{r_j!} = e^{-t}$$

Άρα $S_a = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$E_0(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

$E_j(t) = e^t$

Σαρώθηκε με το CamScanner

B3) $E(t) = E_0(t)E_1(t)E_2(t)\dots E_v(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} e^{vt}$

B4) $E(t) = \frac{1}{2}e^{(v+1)t} + \frac{1}{2}e^{(v-1)t} = \frac{1}{2}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{[(v+1)t]^u}{u!} + \frac{1}{2}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{[(v-1)t]^u}{u!}$

$= \sum_{u=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\left[(v+1)^u + (v-1)^u\right]}_{a_u} \frac{t^u}{u!}$

⑥ Θέμα 4α/ Φεβρ 2011

$a_u$ = # επαναλ. διατάξεων των $v+2$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{v+2}\}$ ανά $k$, όπου

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v \rightarrow$ εμφαν. χωρίς περιορισμό

$\omega_{v+1}, \omega_{v+2} \rightarrow$ τουλάχιστον 1 φορά = ;

B1) $E_j(t, x_j) = \sum_{r_j=0}^{\infty}\frac{(tx_j)^{r_j}}{r_j!}$, $j = 1, 2, \dots, v$

$E_j(t, x_j) = \sum_{r_j=1}^{\infty}\frac{(tx_j)^{r_j}}{r_j!}$, $j = v+1, v+2$

B2) $E_j(t) = e^t$, $j = 1, 2, \dots, v$

$E_j(t) = e^t - 1$, $j = v+1, v+2$

B3) $E(t) = E_1(t)E_2(t)\dots E_{v+2}(t) = e^{vt}(e^t - 1)^2$

B4) $E(t) = e^{vt}(e^{2t} - 2e^t + 1) = e^{(v+2)t} - 2e^{(v+1)t} + e^{vt}$

$= \sum_{u=0}^{\infty}\frac{[(v+2)t]^u}{u!} - 2\sum_{u=0}^{\infty}\frac{[(v+1)t]^u}{u!} + \sum_{u=0}^{\infty}\frac{(vt)^u}{u!}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$= \sum_{u=0}^{\infty} \underbrace{\left[ (v+2)^u - 2(v+1)^u + v^u \right]}_{a_u} \frac{t^u}{u!}$$

Εναλλακτικά:

$A_1$ = Διατ. $v+2$ ανα $k$ του $\underline{\Omega}$ που το $\omega_{v+1}$ δεν εμφ.

$A_2$ = . . . $\omega_{v+2}$ δεν εμφ.

$$a_u = N(A_1' A_2')$$

αρχή ΕΑ $\leftarrow$ $= N(\underline{\Omega}) - (N(A_1) + N(A_2)) + N(A_1 A_2)$

$$= (v+2)^u - 2(v+1)^u + v^u$$

Σαρώθηκε με το CamScanner