21/12/23

Ασκήσεις

① Θέμα 2ο /

α: # λύσεων ακέραιων μη-αρν. $x_1+x_2+\ldots+x_{10}\leq 100$ με $x_i\geq 5$, $i=1,2,\ldots,9$

x_{10} πολ/σιο του 25.

Λύση

α = # ακερ μη-αρν λύσεων της $y_1+y_2+\ldots+y_9+x_{10}\leq 55$ με

$\downarrow$

$y_i=x_i-5$ $\quad x_{10}\geq 0$, πολ/σιο του 25

$i=1,2,\ldots,9$

$(y_1 \dots y_{10})$
ακερ λύσεων ≥ 0 της
$y_1 + \dots + y_{10} = 55 - x_{10}$
"

$$= \sum_{x_{10} \in \{0,25,50\}} \#\text{ακερ. μη αρν. λύσεων της } y_1 + y_2 + \dots + y_9 \leq 55 - x_{10}$$

$$= \sum_{x_{10} \in \{0,25,50\}} \begin{bmatrix} 10 \\ 55 - x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

② Θέμα 2α / Ιαν 2013

a = # ακερ. μη-αρν. λύσεων $(x_1, x_2, \dots, x_9)$ του συστήματος

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) = 12$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) = 7$$

Λύση

Θέτω $\kappa = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$\lambda = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$

Έχω $\kappa \cdot \lambda = 12$

$\kappa + \lambda = 7$

Άρα κ, λ είναι οι ρίζες της $x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4) = 0$

Άρα $(\kappa, \lambda) = (3,4)$ ή $(4,3)$, οπότε

a = # ακερ ≥ 0 λύσεων $(x_1, \dots, x_9)$ του $\begin{Bmatrix} x_1 + \dots + x_4 = 3 \\ x_5 + \dots + x_9 = 4 \end{Bmatrix}$ + # ακερ ≥ 0 λύσεων $(x_1, \dots, x_9)$ του $\begin{Bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_5 + \dots + x_9 = 3 \end{Bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

③ Θέμα 2Β / Ιαν 2013

B = # αυτρ. μη-αρν. λύσεων $(x_1, x_2, \dots, x_7)$ της

$(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_5+x_6+x_7) = 49$

με τους περιορισμούς $0 \le x_i \le 8,\ i=1,2,\dots,7$

Λύση

Έστω $\kappa = x_1+x_2+x_3+x_4 \in [0, 4\cdot 8] \cap \mathbb{Z}$

$\lambda = x_1+x_5+x_6+x_7 \in [0, 32] \cap \mathbb{Z}$

Άρα από $\kappa\lambda = 49$ έχουμε $\kappa = \lambda = 7$

Άρα B = # αυτρ. μη-αρν. λύσεων $(x_1, \dots, x_7)$ του συστήματος

$$\left\{ \begin{matrix} x_1+x_2+x_3+x_4 = 7 \\ x_1+x_5+x_6+x_7 = 7 \end{matrix} \right\}$$

$= \sum_{x_1=0}^{7}$ # αυτρ. λύσεων μη-αρν $(x_2, \dots, x_7)$ του

$$\left\{ \begin{matrix} x_2+x_3+x_4 = 7-x_1 \\ x_5+x_6+x_7 = 7-x_1 \end{matrix} \right\}$$

$$= \sum_{x_1=0}^{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 7-x_1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}^2 + \dots + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}^2$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

④ Θέμα 2Β / Σεπτ 2012

\# αικερ. μη-αρν. λύσεων (x_1, x_2, x_3, x_4) του

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=8 \\ x_1+x_2+x_4=10 \end{cases}$$

Λύση

α' τρόπος

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=8 \\ x_1+x_2+x_4=10 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1+x_2+x_3=8 \\ x_4=x_3+2 \end{cases}$$

Σε κάθε λύση (x_1, x_2, x_3) της $x_1+x_2+x_3=8$ αντιστοιχεί μοναδ. λύση $(x_1, x_2, x_3, \underset{x_3+2}{\underset{\shortparallel}{x_4}})$ του συστημ. και αντίστροφα

Άρα έχω $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 8 \end{smallmatrix} \right]$ λύσεις του συστήματος

β' τρόπος

$$\underset{\text{πλήθος}}{\text{Ζητούμενο}} = \sum_{\substack{(x_1,x_2):\ x_1+x_2 \le 8 \\ \text{και } x_1, x_2 \geq 0}} \Bigg(\underbrace{\# \text{ λύσεων του συστήματος } \substack{x_3=8-x_1-x_2 \\ x_4=10-x_1-x_2}}_{=1} \Bigg)$$

$= \#$ αικερ ≥ 0 λύσεων της $x_1+x_2 \leq 8 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 8 \end{smallmatrix} \right]$

⑤ Άσκηση 7 φυλ. e-class (πιο γενική)

Γενικό ερώτημα:

\# συνδ. ν ανά k του $\{1,2,\dots,\nu\}$ όπου υπάρχει κάποιος περιορισμός για την "απόσταση" των στοιχείων

πχ.

$a = \#$ συνδ ν ανά k του $\{1,2,\dots,\nu\}$ χωρίς επανάληψη και χωρίς διαδοχ. στοιχεία

$= \#$ υποσυνόλων $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, v\}$
με $i_2 - i_1 \geq 2$, $i_3 - i_2 \geq 2$, $\dots$, $i_k - i_{k-1} \geq 2$

$x_1 = i_1$
$x_2 = i_2 - i_1$
$x_3 = i_3 - i_2$
$\vdots$
$x_k = i_k - i_{k-1}$
$x_{k+1} = v - i_k$

αυξ ≥ 0
$= \#$ λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = v$
με $x_1 \geq 1$
$x_i \geq 2$, $i = 2, 3, \dots, k$
$x_{k+1} \geq 0$

$$= \begin{bmatrix} k+1 \\ v-1-2(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 \\ v+1-2k \end{bmatrix}$$

$$= \binom{k+1+v+1-2k-1}{v+1-2k} = \binom{v+1-k}{v+1-2k} = \binom{v+1-k}{k}$$

⑥ Ασκήσεις 4,5,6 φυλ e-class

Ένα ασανσέρ ξεκινάει απ'το ισόγειο κτιρίου με v ορόφους. Έχει k διακεκρ. άτομα. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατέβουν τα άτομα από τους ορόφους; $=$ (α) $\leftarrow$ Ασκ. 4

Το ίδιο αλλά με όμοια κουτιά αντί για ανθρώπους; $=$ (β) $\leftarrow$ Ασκ 5

Το ίδιο αλλά σε κάθε όροφο πρέπει να αφήσει τουλάχιστον 2 κουτιά $=$ (γ) $\leftarrow$ Ασκ 6

Λύση

(α) $= v^k$ (# συναρτήσεων: Σύνολο ατόμων $\to$ Σύνολο ορόφων) η πολ/κη αρχή:

1^o στ: Όροφος για 1^o άτομο → ν επιλογές

2^o στ: Όροφος για 2^o άτομο → ν επιλογές

⋮

k^o στ: Όροφος για k^o άτομο → ν επιλογές

(β) = # ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu = k$ με $x_i \geq 0$

(x_i = # κουτιών για όροφο i) $= \left[\begin{matrix}\nu \\ k\end{matrix}\right]$

(γ) = # ακέρ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu = k = \left[\begin{matrix}\nu \\ k-2\nu\end{matrix}\right] = \binom{\nu+k-2\nu-1}{k-2\nu}$

με $x_i \geq 2$

Για εξετάσεις

1) Πολ/κη αρχή - Προσθ. αρχή
2) # ακερ. λύσεων εξίσωσης ← κατανομές ομοίων σφαιρ. σε διακ. κελι
3) Υπολογισμοί αθροισμάτων
4) Αρχή εγκλ - αποκλ.
5) Γεννήτριες