

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΜΑΡΤΙΟΣ 2003

Θέμα 1. Διαθέτουμε συνολικά $3κ$ σφαιρίδια, εκ των οποίων τα $κ$ είναι κόκκινα, τα $κ$ είναι άσπρα και τα $κ$ μαύρα. Κάθε σειρά σφαιριδίων είναι αριθμημένη από το 1 μέχρι το $κ$. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σε μια σειρά έτσι ώστε:

- (α) πρώτα να είναι όλα μαζί τα κόκκινα, ύστερα τα άσπρα και μετά τα μαύρα;
- (β) να εμφανίζονται εναλλάξ κόκκινο, άσπρο, μαύρο; [Η σειρά να αρχίζει από κόκκινο σφαιρίδιο.]
- (γ) να εμφανίζονται όλα μαζί τα μαύρα σφαιρίδια στο τέλος της σειράς;

Θέμα 2. Υπολογίστε τα αθροίσματα:

(α)

$$S_1 = \sum_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \text{ περιττός}}}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} 2^{\kappa}, \quad S_2 = \sum_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \text{ άρτιος}}}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} 2^{\kappa}.$$

(β)

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \kappa^2 \binom{\nu}{\kappa} 3^{\kappa}.$$

Θέμα 3. Οι έφηβοι ενός Ινδιάνικου χωριού περνούν τις δοκιμασίες της Αρκούδας (Α), του Βίσωνα (Β) και του Γύπα (Γ), που περιλαμβάνει η τελετή ενηλικίωσης. Γνωρίζουμε ότι:

- (i) Ο αριθμός επιτυχόντων στη δοκιμασία Β είναι διπλάσιος του αριθμού επιτυχόντων στη δοκιμασία Α.
- (ii) Ο αριθμός επιτυχόντων στη δοκιμασία Γ είναι τριπλάσιος του αριθμού επιτυχόντων στη δοκιμασία Α.
- (iii) Για κάθε δύο συγκεκριμένες δοκιμασίες, ο αριθμός αυτών που επέτυχαν και στις δύο είναι ο ίδιος (δηλαδή, ο αριθμός των επιτυχόντων σε Α και Β είναι ίδιος με τον αριθμό επιτυχόντων σε Α και Γ, και ίδιος με τον αριθμό επιτυχόντων σε Β και Γ).
- (iv) 46 άτομα πέτυχαν σε τουλάχιστον μία δοκιμασία.
- (v) Ένα άτομο πέτυχε και στις τρεις δοκιμασίες.
- (vi) Πέντε άτομα πέτυχαν στη δοκιμασία Α και απέτυχαν στη δοκιμασία Β.

Να βρεθούν οι αριθμοί των ατόμων που

- (α) πέτυχαν στη δοκιμασία Α (της Αρκούδας).
- (β) πέτυχαν και στις δύο δοκιμασίες Α και Β (της Αρκούδας και του Βίσωνα).

Θέμα 4. Έστω ν φυσικός αριθμός, $\nu \geq 3$, και $T(\nu, \kappa)$ το πλήθος συνδυασμών με επανάληψη των ν στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ ανά κ , όπου καθένα από τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ εμφανίζεται το πολύ μία φορά, ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία δεν υπάρχει περιορισμός. Υπολογίστε

(α) τη γεννήτρια

$$A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} T(\nu, \kappa) t^{\kappa}.$$

(β) τον αριθμό $T(\nu, \kappa)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

