ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004

Θέμα 1. Θεωρούμε $m+n$ κόκκινα και μαύρα διακεκριμένα σφαιρίδια που φέρουν τους αριθμούς $1,2,\ldots,m,m{+}1,m{+}2,\ldots,m{+}n$, εκ των οποίων τα σφαιρίδια με τους αριθμούς $1,2,\ldots,m$ είναι κόκκινα, ενώ αυτά με τους αριθμούς $m+1,m+2,\ldots,m+n$ είναι μαύρα. Να υπολογίσετε τους διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης των σφαιριδίων σε μία γραμμή έτσι ώστε:
(α) Όλα τα κόκκινα σφαιρίδια τοποθετούνται συνεχόμενα.
(β) Δεν υπάρχουν κόκκινα σφαιρίδια συνεχόμενα [εδώ υποτίθεται ότι $m \leq n+1$].

Θέμα 2. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$\text{(α)} \qquad \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{2\nu}{\kappa} = \binom{2\nu}{0} + \binom{2\nu}{1} + \cdots + \binom{2\nu}{\nu}.$$

$$\text{(β)} \qquad \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2\kappa} = \binom{2\nu}{0} + \binom{2\nu}{2} + \cdots + \binom{2\nu}{2\nu}.$$

Θέμα 3. (α) Να υπολογίσετε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + 2x_2 = \kappa$$

για κάθε συγκεκριμένο $\kappa \geq 0$. [Διακρίνετε τις περιπτώσεις κ άρτιος και κ περιττός].
(β) Με πόσους τρόπους μπορεί μια Αυτόματη Ταμειακή Μηχανή (ATM) να καταβάλλει το ποσό των 1000 Ευρώ αν διαθέτει χαρτονομίσματα των 5, 10 και 20 Ευρώ;

Θέμα 4. (α) Έστω $\Sigma(\nu,\kappa)$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{1,2,\ldots,2\nu\}$ ανά κ, όπου για $i=1,2,\ldots,\nu$ το στοιχείο i εμφανίζεται το πολύ $i-1$ φορές, ενώ για $i=\nu+1,\nu+2,\ldots,2\nu$ το στοιχείο i εμφανίζεται 0 ή $i-\nu$ ή $2(i-\nu)$ ή $3(i-\nu)$ ή ... φορές στο συνδυασμό. Να υπολογίσετε τη (συνήθη) γεννήτρια

$$A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Sigma(\nu,\kappa) t^{\kappa},$$

και τον αριθμό $\Sigma(\nu,\kappa)$.
(β) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2\nu} = \kappa,$$

με τους περιορισμούς: $0 \leq x_i \leq i-1$ για $i=1,2,\ldots,\nu$, και
$x_i \in \{0, i-\nu, 2(i-\nu), 3(i-\nu), \ldots\}$ για $i=\nu+1,\nu+2,\ldots,2\nu$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!