

B

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

Θέμα 1. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα υποσύνολο A του $\Omega = \{1, 2, \dots, 3\nu\}$, μεγέθους κ . Να βρείτε με πόσους τρόπους γίνεται αυτή η κατασκευή σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Το υποσύνολο A πρέπει να περιέχει ακριβώς 3 από τους αριθμούς $3, 6, 9, \dots, 3\nu$ (εδώ υποτίθεται ότι $\nu \geq 3$ και $3 \leq \kappa \leq 2\nu + 3$).

(β) Το υποσύνολο A μπορεί να περιέχει το πολύ έναν από τους αριθμούς $3i - 2, 3i - 1$ και $3i$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, \nu$ (εδώ υποτίθεται ότι $1 \leq \kappa \leq \nu$).

Θέμα 2. (α) Να βρεθεί το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_\nu = \kappa,$$

με τους περιορισμούς $x_1 \geq 3, x_2 \geq 3, \dots, x_\nu \geq 3$ (εδώ υποτίθεται ότι $\kappa \geq 3\nu$).

(β) Να βρεθεί το πλήθος των ακεραίων λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_\nu \leq \kappa,$$

με τους περιορισμούς $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_\nu \geq 2$ (εδώ υποτίθεται ότι $\kappa \geq 2\nu$).

Θέμα 3. Από τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ κατασκευάζουμε έναν πενταψήφιο αριθμό (π.χ., $14423, 52143, 33111$, κ.ο.κ.).

(α) Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;

(β) Πόσοι από αυτούς περιέχουν και τα 3 ψηφία $1, 2, 3$;

Θέμα 4. Έστω $A(\nu, \kappa)$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία ω_1 και ω_2 εμφανίζονται το πολύ δυο φορές το καθένα, ενώ για τα υπόλοιπα $\nu - 2$ στοιχεία δεν υπάρχει περιορισμός. Να υπολογίσετε:

(α) τη γεννήτρια

$$A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} A(\nu, \kappa) t^\kappa.$$

(β) τον αριθμό $A(\nu, \kappa)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!