ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΙΟΥΛΙΟΣ 2007

1ο	2ο	3ο	4ο	5ο	6ο	7ο	8ο	9ο	10ο	Σ

Α.Μ:..

ΕΠΩΝΥΜΟ:..

ΟΝΟΜΑ:..

ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΡΟΣ:...............................

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:..11.Ιουλίου..2007.........

ΠΕΡΙΟΔΟΣ:...Φεβρουαρίου...2007..........

Προσοχή!!! Οδηγίες συμπλήρωσης του διαγωνίσματος:
1) Μπορείτε να επιλέξετε το πολύ επτά (7) θέματα από τα δέκα (10), και να απαντήσετε **μόνο σε αυτά**.
2) Κάθε θέμα έχει 5 επιλογές της μορφής Σ (Σωστό) – Λ (Λάθος). Ένα θέμα βαθμολογείται με άριστα (+5) μόνο αν έχει συμπληρωμένες **σωστά και τις 5 επιλογές** Α,Β,Γ,Δ,Ε.
3) Κάθε ορθή επιλογή Σ–Λ βαθμολογείται με $+1$, κάθε εσφαλμένη με -1, ενώ η μη συμπλήρωση βαθμολογείται με 0.
4) Το Άριστα (10) ισοδυναμεί με 6 (έξι) πλήρως βαθμολογημένα (ορθά απαντημένα) θέματα (=30 μονάδες), ενώ το 5 (βάση) αντιστοιχεί σε 3 πλήρη θέματα (=15 μονάδες), με την προϋπόθεση, φυσικά, ότι δεν έχουν γίνει σφάλματα σε τυχόν άλλα επιλεγμένα θέματα – προφανώς, τυχόν σφάλματα ενδέχεται να οδηγήσουν σε αρνητική συνεισφορά στην τελική βαθμολογία.
5) Η διάρκεια εξέτασης είναι δύο (2) ώρες, και το φυλλάδιο των θεμάτων, με τις απαντήσεις, παραδίδεται **ολόκληρο**.
6) Οι απαντήσεις σας πρέπει να δίδονται στον **ΠΙΝΑΚΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ**, παρακάτω, βάζοντας σε κύκλο ένα από τα Σ – Λ σε κάθε επιλογή Α,Β,Γ,Δ,Ε από κάθε επιλεγμένο θέμα.
7) Μπορείτε να χρησιμοποιείτε για πρόχειρο όλες τις σελίδες του φυλλαδίου, εκτός της παρούσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

	1ο	**2ο**	**3ο**	**4ο**	**5ο**	**6ο**	**7ο**	**8ο**	**9ο**	**10ο**
Α	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ
Β	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ
Γ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ
Δ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ
Ε	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ	Σ Λ

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο. Βρείτε πόσους διαφορετικούς δεκαψήφιους αριθμούς μπορούμε να γράψουμε, αν μεταθέσουμε κατά όλους τους δυνατούς τρόπους τα ψηφία του αριθμού 1223334444.

Α: $\binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4}$ Β: $(1!)\cdot(2!)\cdot(3!)\cdot(4!)$ Γ: $10!$ Δ: $\dfrac{10!}{(1!)\cdot(2!)\cdot(3!)\cdot(4!)}$

Ε: $\binom{10}{2}\binom{8}{3}\binom{5}{4}$

Θέμα 2ο. Τα σύμβολα α θεωρούνται όμοια μεταξύ τους, και το ίδιο ισχύει και για τα β. Τοποθετούμε 10 α και 20 β σε μία σειρά, έτσι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον ένα β μεταξύ δύο οποιωνδήποτε α. Με πόσους τρόπους γίνεται αυτή η τοποθέτηση;

Α: $(20!)\cdot(21)_{10}$ Β: $\dfrac{21!}{(11!)\cdot(10!)}$ Γ: $\binom{21}{10}$ Δ: $\binom{30}{10}$ Ε: $\dfrac{30!}{(10!)\cdot(20!)}$

Θέμα 3ο. Βρείτε πόσες ακέραιες λύσεις (x_1, x_2, x_3, x_4) έχει η ανίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 20,$$

με $x_1 \ge 2$, $x_2 \ge 2$, $x_3 \ge 3$, $x_4 \ge 3$.

Α: $\dfrac{(14)_{10}}{10!}$ Β: 1001 Γ: $\left[\begin{matrix}5\\10\end{matrix}\right]$ Δ: $\binom{14}{10}$ Ε: $\binom{14}{4}$

Θέμα 4ο. Βρείτε πόσες ακέραιες λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_{14})$ έχει η εξίσωση

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{14} = 10,$$

με $0 \le x_1 \le 1, \quad 0 \le x_2 \le 1, \ \ldots, \ 0 \le x_{14} \le 1$.

Α: $\dfrac{(14)_{10}}{10!}$ Β: 1001 Γ: $\left[\begin{matrix}14\\10\end{matrix}\right]$ Δ: $\binom{14}{10}$ Ε: $\binom{14}{4}$

Θέμα 5ο. Για $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \text{ άρτιος}}}^{50} \binom{50}{\kappa} x^\kappa = \binom{50}{0} + \binom{50}{2}x^2 + \binom{50}{4}x^4 + \cdots + \binom{50}{50}x^{50}.$$

Α: $(1+x)^{50} - (1-x)^{50}$ Β: $\frac{1}{2}[(1-x)^{50} + (1+x)^{50}]$ Γ: $\frac{1}{2}[(1+x)^{50} - (1-x)^{50}]$

Δ: $(1+x)^{50} - (1-x)^{50}$ Ε: $\frac{1}{2}[(1+x)^{50} + (1-x)^{50}]$

Θέμα 6ο. Για $x, y \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \{1, 2, \ldots\}$, να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{(x+\kappa-1)_\kappa \cdot (y+\nu-\kappa-1)_{\nu-\kappa}}{\kappa! \cdot (\nu-\kappa)!}.$$

Α: $(-1)^\nu \cdot \binom{-x-y}{\nu}$ Β: $\frac{(x+y+\nu-1)_\nu}{\nu!}$ Γ: $\left[\begin{array}{c} x+y \\ \nu \end{array} \right]$ Δ: $\binom{x+y+\nu-1}{\nu}$
Ε: $\frac{(-1)^\nu \cdot (-x-y)_\nu}{\nu!}$

Θέμα 7ο. Βρείτε πόσοι φυσικοί αριθμοί από τους $\{1, 2, 3, \ldots, 5400\}$ δεν διαιρούνται ούτε με 6 ούτε με 9.

Α: 4200 Β: 4200 Γ: 4200 Δ: 4000 Ε: 4000

Θέμα 8ο. Ρίχνουμε ένα ζάρι ν φορές, και έστω $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ οι διαδοχικές ενδείξεις, όπου $x_i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών ρίψεων (ν-άδων), κατά τις οποίες εμφανίζονται **και οι τρεις έδρες** 1,2,3.

Α: $6^\nu - 3 \cdot 5^\nu + 3 \cdot 4^\nu - 3^\nu$ Β: $\nu(\nu-1)(\nu-2) \cdot 6^{\nu-3}$ Γ: $\sum_{\kappa=0}^{3} (-1)^\kappa \binom{3}{\kappa} 6^{\nu-\kappa}$

Δ: $\sum_{\kappa=0}^{3} (-1)^{\kappa+1} \binom{3}{\kappa} (3+\kappa)^\nu$ Ε: $\sum_{\kappa=0}^{3} (-1)^\kappa \binom{3}{\kappa} (6-\kappa)^\nu$

Θέμα 9ο. Να βρεθεί η (συνήθης) γεννήτρια $A(t)$ των επαναληπτικών συνδυασμών των 4ν στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{4\nu}\}$ ανά κ, όταν τα στοιχεία $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ μία φορά στον συνδυασμό, τα στοιχεία $\omega_{\nu+1}, \ldots, \omega_{2\nu}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ δύο φορές, τα στοιχεία $\omega_{2\nu+1}, \ldots, \omega_{3\nu}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ τρεις φορές, ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία, $\omega_{3\nu+1}, \ldots, \omega_{4\nu}$, δεν υπάρχει περιορισμός.

Α: $(1+t)^\nu (1+t+t^2)^\nu (1+t+t^2+t^3)^\nu (1-t)^{-\nu}$ Β: $\left(\frac{(1+t)(1+t+t^2)(1+t+t^2+t^3)}{1-t} \right)^\nu$
Γ: $\frac{(1+t)^{4\nu}}{(1-t)^\nu}$ Δ: $(1-t)^{-\nu}$ Ε: $\frac{(1-t^2)^\nu (1-t^3)^\nu (1-t^4)^\nu}{(1-t)^{4\nu}}$

Θέμα 10ο. Να βρεθεί η (εκθετική) γεννήτρια $E(t)$ των επαναληπτικών διατάξεων των ν στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ανά κ, όταν όλα τα στοιχεία πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά.

Α: $(e^t - 1)^\nu$ Β: $e^{\nu t} \sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{j} (-1)^j e^{-jt}$

Γ: $\sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{j} (-1)^{\nu-j} e^{jt}$ Δ: $(e^t - 1)^{-\nu}$ Ε: $(-1)^\nu \cdot (1-e^t)^{-\nu}$