

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Ένα υπουργείο έχει 500 (διακεκριμένα) στελέχη τα οποία είναι κατανομημένα σε 125 διευθύνσεις που απαρτίζονται από το διευθυντή, τον υποδιευθυντή και 2 τμηματάρχες η καθεμιά. Από τα 500 στελέχη πρόκειται να επιλεγούν 60. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η επιλογή σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (α) Αν πρέπει να περιέχονται ακριβώς 20 διευθυντές.
- (β) Αν πρέπει να περιέχονται ακριβώς 20 τμηματάρχες και 15 υποδιευθυντές.
- (γ) Αν δεν πρέπει να συμμετέχουν στελέχη από την ίδια διεύθυνση.
- (δ) Αν πρέπει να περιέχονται τουλάχιστον 1 διευθυντής, τουλάχιστον 1 υποδιευθυντής και τουλάχιστον 1 τμηματάρχης.

Θέμα 2. (α) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{x=0}^y (y^2 + x + 2x^2) \binom{y}{x}.$$

(β) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\tau=0}^y \binom{x-\tau}{x-y} \binom{x}{x-\tau}.$$

(γ) Να υπολογιστεί το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_9 \leq 200,$$

με τους περιορισμούς τα $x_i \geq 10$ για $i = 1, 2, \dots, 8$ και το x_9 να είναι πολλαπλάσιο του 50.

Θέμα 3. Έστω $\Pi(n, k)$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των $n + 5$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+5}\}$ ανά k , όπου τα $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ επιτρέπεται να εμφανίζονται οσοσδήποτε φορές, ενώ τα $\omega_6, \omega_7, \dots, \omega_{n+5}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται άρτιο αριθμό φορές (0, 2, 4, ...). Έστω επίσης $P(n, k)$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των $n + 10$ στοιχείων του $\Omega' = \{\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{n+10}\}$ ανά k , όπου τα $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4, \omega'_5$ επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ μια φορά, ενώ τα $\omega'_6, \omega'_7, \dots, \omega'_{n+10}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται άρτιο αριθμό φορές (0, 2, 4, ...).

- (α) Να βρείτε τη γεννήτρια συνδυασμών των $\Pi(n, k)$.
- (β) Να βρείτε τη γεννήτρια συνδυασμών των $P(n, k)$.
- (γ) Να βρείτε μια σχέση (όσο πιο απλή σας είναι δυνατό) που να συνδέει τα $\Pi(n, k), P(n, k)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 3 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Τα 10 υποερωτήματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.