

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2008 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 2008\}$.

- (α) (1 βαθμός) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Ω τα οποία περιέχουν 100 ακριβώς στοιχεία από τα οποία ακριβώς 20 είναι άρτιοι αριθμοί;
- (β) (1 βαθμός) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Ω που περιέχουν ακριβώς 5 στοιχεία μικρότερα ή ίσα του 1000 και οσαδήποτε στοιχεία μεγαλύτερα του 1000;
- (γ) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες όλα τα πολλαπλάσια του 5 είναι διαδοχικά;
- (δ) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες δεν υπάρχουν διαδοχικά πολλαπλάσια του 5;

Θέμα 2. Θεωρούμε το αλφάβητο $\Omega = \{A, B, C, D, E\}$.

- (α) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι διαφορετικές λέξεις 10 γραμμάτων που περιέχουν ακριβώς 2 φορές κάθε γράμμα του Ω , αρχίζουν με A και τελειώνουν με E ;
- (β) (2 βαθμοί) Πόσες είναι οι διαφορετικές λέξεις 10 γραμμάτων που περιέχουν ακριβώς 2 φορές κάθε γράμμα του Ω και δεν έχουν ίδια διαδοχικά γράμματα;

Θέμα 3. (α) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{x=0}^y \frac{y+1}{x+1} \binom{y}{x} 3^x.$$

(β) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\rho=0}^x \rho \binom{x}{\rho}^2.$$

Θέμα 4. Έστω a_x , $x = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2008}\}$ ανά x , όπου το ω_1 εμφανίζεται το πολύ 1 φορά, το ω_2 εμφανίζεται 0 ή 2 ή 4 φορές, το ω_3 εμφανίζεται πολλαπλάσιο του 6 αριθμό φορές (0, 6, 12, 18, ... φορές) και τα υπόλοιπα ω_x , $x = 4, 5, \dots, 2008$ εμφανίζονται χωρίς περιορισμό (0, 1, 2, 3, ... φορές).

(α) (1 βαθμός) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{x=0}^{\infty} a_x t^x.$$

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί ένας όσο το δυνατόν απλούστερος τύπος για τον υπολογισμό του πλήθους a_x των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2008}\}$ ανά x που πληρούν τις παραπάνω συνθήκες.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!