

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \dots, 2009\}$.

(α) (1.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα στοιχεία 2007, 2008 και 2009 βρίσκονται σε κάποιες από τις 20 τελευταίες θέσεις;

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσα υποσύνολα του Ω έχουν ακριβώς 100 στοιχεία εκ των οποίων ακριβώς 60 είναι περιττά;

(γ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω που δεν έχουν διαδοχικά άρτια στοιχεία;

(δ) (0.5 βαθμ.) Πόσα υποσύνολα του Ω έχουν ακριβώς 40 στοιχεία και περιέχουν οπωσδήποτε τους αριθμούς 1, 2 και 3;

(ε) (2.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες το στοιχείο 2009 δεν καταλαμβάνει την τελευταία θέση, το στοιχείο 2008 δεν καταλαμβάνει τη προτελευταία θέση και το στοιχείο 1 δεν καταλαμβάνει την πρώτη θέση;

Θέμα 2. (α) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 2009 όμοια σφαιρίδια σε 50 διακεκριμένα κελιά, όταν το τελευταίο κελί έχει χωρητικότητα 200 σφαιριδίων και τα υπόλοιπα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας.

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{11} + x_{12} \leq 200,$$

με τους περιορισμούς $x_0 \in \{0, 10\}$, $x_1 \in \{0, 1\}$ και $x_i \geq 2$ για $i = 2, 3, 4, \dots, 12$.

Θέμα 3. (α) (1.5 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu+4-\kappa}{4} \binom{5+\kappa}{\kappa}, \nu \in \mathbb{N}.$$

(β) (1.0 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} \frac{(\nu-\kappa)^2}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}.$$

Θέμα 4. Έστω a_κ , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των 2ν στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu}\}$ ανά κ , όπου τα $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ εμφανίζονται 3 ή 6 φορές το καθένα και τα $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \dots, \omega_{2\nu}$ εμφανίζονται πολ. του 6 αριθμό φορές (δηλαδή 0 ή 6 ή 12 κλπ. φορές) το καθένα.

(α) (1.0 βαθμ.) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa t^\kappa.$$

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθούν οι όροι a_κ για $\kappa = 3\nu + 21$ και $\kappa = 3\nu + 22$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!