

A

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009

Θέμα 1. Έστω $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\nu$ οι κυβερνήτες και $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu$ οι συγκυβερνήτες ν πολεμικών αεροσκαφών A_1, A_2, \dots, A_ν , αντίστοιχα ($\nu \geq 10$). Από τους παραπάνω 2ν διακεκριμένους πιλότους πρόκειται να επιλεγούν 10 άτομα προκειμένου να παρακολουθήσουν ένα εκπαιδευτικό σεμινάριο (η σειρά επιλογής δεν μας ενδιαφέρει). Να βρείτε με πόσους τρόπους γίνεται η επιλογή των 10 πιλότων σε καθεμιά από τις εξής περιπτώσεις:

(α) Αν πρέπει να επιλεγούν ακριβώς 4 κυβερνήτες.

(β) Αν πρέπει να επιλεγούν ακριβώς 4 κυβερνήτες, αλλά δεν επιτρέπεται να επιλεγούν πιλότοι του ίδιου αεροσκάφους.

(γ) Αν στο σεμινάριο πρέπει να μετέχουν τουλάχιστον δύο άτομα που είναι πιλότοι στο ίδιο αεροσκάφος.

Θέμα 2.

(α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 3ν (όμοια) μήλα σε 2ν (διακεκριμένα) παιδιά $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2\nu}$, αν τα παιδιά $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\nu$ πρέπει να πάρουν από τουλάχιστον δύο μήλα το καθένα.

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{(4+\kappa)_\kappa \cdot (2+\nu-\kappa)_{\nu-\kappa}}{\kappa! \cdot (\nu-\kappa)!}.$$

Θέμα 3.

(α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε τα ψηφία $1, 2, \dots, 9$ σε μία γραμμή έτσι ώστε στην πρώτη θέση να μην βρίσκεται το ψηφίο 1, στην τρίτη θέση να μην βρίσκεται το 3, στην πέμπτη θέση να μην βρίσκεται το 5 και στην έβδομη θέση να μην βρίσκεται το 7;

(β) Έστω $D(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των $3\nu + 1$ στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \dots, 3\nu + 1\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $1, 2, \dots, \nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται (μηδέν ή) άρτιο αριθμό φορές το καθένα, ενώ τα στοιχεία $\nu + 1, \nu + 2, \dots, 3\nu + 1$ επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ μία φορά το καθένα. Έστω, επίσης, $D'(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των $2\nu + 1$ στοιχείων του $\Omega' = \{1, 2, \dots, 2\nu + 1\}$ ανά κ , όπου κάθε στοιχείο από τα $\nu + 1, \nu + 2, \dots, 2\nu + 1$ επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ μία φορά το καθένα ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία του Ω' δεν υπάρχει περιορισμός. Αποδείξτε ότι $D(\nu, \kappa) = D'(\nu, \kappa)$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!