

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

**Θέμα 1.** Θεωρούμε το σύνολο  $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$ .

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσα είναι τα υποσύνολα του  $\Omega$  που περιέχουν ακριβώς 25 άρτιους και κανέναν περιττό;

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσα είναι τα υποσύνολα του συνόλου  $\{1, 3, 5, 7, \dots, 99\}$ ;

(γ) (0.5 βαθμ.) Πόσα είναι τα υποσύνολα του  $\Omega$  που περιέχουν ακριβώς 25 άρτιους και οσοσδήποτε περιττούς;

(δ) (1.0 βαθμ.) Πόσα είναι τα υποσύνολα του  $\Omega$  που περιέχουν το πολύ 25 άρτιους και κανέναν περιττό;

**Θέμα 2.** (α) (1.5 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{1}{\kappa+1} \binom{\nu}{\kappa}^2.$$

(β) (1.0 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} (\kappa^2 - 1) \binom{\nu}{\kappa} 2^{\kappa}.$$

**Θέμα 3.** Θεωρούμε 20 άτομα που εισέρχονται στο ισόγειο σε ανελκυστήρα πεντάροφης οικοδομής γραφείων.

(α) (1.25 βαθμ.) Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων αποβίβασης των ατόμων στους ορόφους 1 έως 5, έτσι ώστε σε κάθε έναν από τους ορόφους 1, 2 και 3 να αποβιβαστεί τουλάχιστον ένα άτομο.

(β) (1.25 βαθμ.) Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων αποβίβασης των ατόμων ώστε να αποβιβαστεί ο ίδιος αριθμός ατόμων σε καθέναν από τους 5 ορόφους.

**Θέμα 4.** (α) (1.25 βαθμ.) Έστω  $\alpha_{\kappa}$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$  το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu}\}$  ανά  $\kappa$ , όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται τουλάχιστον 5 φορές. Να βρεθεί η γεννήτρια  $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_{\kappa} t^{\kappa}$  και να υπολογιστεί το  $\alpha_{\kappa}$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

(β) (1.25 βαθμ.) Έστω  $\beta_{\kappa}$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$  το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu}\}$  ανά  $\kappa$ , όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται 1 ή 3 φορές. Να βρεθεί η γεννήτρια  $B(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_{\kappa} t^{\kappa}$  και να υπολογιστεί το  $\beta_{\kappa}$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

**ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**