

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \dots, 60\}$.

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσα είναι τα υποσύνολα του συνόλου $\{2, 4, 6, 8, \dots, 60\}$;

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Ω που περιέχουν ακριβώς 15 περιττούς και κανέναν άρτιο;

(γ) (1.0 βαθμ.) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Ω που περιέχουν το πολύ 15 περιττούς και κανέναν άρτιο;

(δ) (0.5 βαθμ.) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Ω που περιέχουν ακριβώς 15 περιττούς και οσοσδήποτε άρτιους;

Θέμα 2. (α) (1.0 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{s=0}^{\nu} (s^2 + 2s + 1) \binom{\nu}{s} 3^s.$$

(β) (1.5 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{s=0}^{\nu} s \binom{\nu}{s}^2.$$

Θέμα 3. Θεωρούμε 50 άτομα που εισέρχονται στο ισόγειο σε ανεγκυστήρα δεκαόροφης οικοδομής γραφείων.

(α) (1.25 βαθμ.) Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων αποβίβασης των ατόμων ώστε να αποβιβαστεί ο ίδιος αριθμός ατόμων σε καθέναν από τους 10 ορόφους.

(β) (1.25 βαθμ.) Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων αποβίβασης των ατόμων στους ορόφους 1 έως 10, έτσι ώστε σε κάθε έναν από τους ορόφους 8, 9 και 10 να αποβιβαστεί τουλάχιστον ένα άτομο.

Θέμα 4. (α) (1.25 βαθμ.) Έστω α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ ανά k , όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται 2 ή 4 φορές. Να βρεθεί η γεννήτρια $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$ και να υπολογιστεί το α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$

(β) (1.25 βαθμ.) Έστω β_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ ανά k , όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται τουλάχιστον 3 φορές. Να βρεθεί η γεννήτρια $B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k$ και να υπολογιστεί το β_k , $k = 0, 1, 2, \dots$

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!