

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. Θεωρούμε 100 (διακεκριμένα) αγόρια και 40 (διακεκριμένα) κορίτσια.

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 140 ατόμων σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν κορίτσια που να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις;

(β) (1.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 140 ατόμων σε σειρά ώστε όλα τα κορίτσια να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις (δηλαδή να μην παρεμβάλλεται αγόρι μεταξύ κοριτσιών);

(γ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 140 ατόμων σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν αγόρια στις τελευταίες 10 θέσεις;

(δ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 140 ατόμων σε σειρά που ξεκινούν με 70 συνεχόμενα αγόρια, μετά έχουν 40 συνεχόμενα κορίτσια και τελειώνουν με 30 συνεχόμενα αγόρια;

Θέμα 2. Να βρεθεί πόσες είναι οι διαφορετικές κατανομές 30 ομοίων σφαιριδίων σε 10 διακεκριμένα κελιά στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) (1.0 βαθμ.) Αν το πρώτο κελί είναι χωρητικότητας 5 σφαιριδίων και τα υπόλοιπα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας.

(β) (1.5 βαθμ.) Αν όλα τα κελιά είναι χωρητικότητας 5 σφαιριδίων.

Θέμα 3. (α) (1.2 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\substack{\kappa=0, \\ \kappa \text{ αρτιος}}^{\nu} (\kappa + 1) \binom{\nu}{\kappa} 2^{\kappa}.$$

(β) (1.3 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=\nu}^{\infty} \binom{\kappa}{\nu} 2^{\nu-\kappa}.$$

Θέμα 4. (α) (1.3 βαθμ.) Έστω α_{κ} , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu}, \omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu}$ μπορούν να εμφανίζονται οσοδήποτε φορές (χωρίς περιορισμό), ενώ τα στοιχεία $\omega_{\nu+1}$ και $\omega_{\nu+2}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται 0 ή 2 φορές το καθένα. Να βρεθεί η (εκθετική) γεννήτρια διατάξεων $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_{\kappa} \frac{t^{\kappa}}{\kappa!}$ και να υπολογιστεί το α_{κ} , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

(β) (1.2 βαθμ.) Έστω β_{κ} , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu}, \omega_{\nu+1}\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu}$ μπορούν να εμφανίζονται οσοδήποτε φορές (χωρίς περιορισμό), ενώ το στοιχείο $\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ 2 φορές. Να βρεθεί η γεννήτρια συνδυασμών $B(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_{\kappa} t^{\kappa}$ και να υπολογιστεί το β_{κ} , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!