

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε 20 (διακεκρυμένα) κορίτσια και 80 (διακεκρυμένα) αγόρια.

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 100 ατόμων σε σειρά που ξεκινούν με 30 συνεχόμενα αγόρια, μετά έχουν 20 συνεχόμενα κορίτσια και τελειώνουν με 50 συνεχόμενα αγόρια;

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 100 ατόμων σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν κορίτσια που να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις;

(γ) (1.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 100 ατόμων σε σειρά ώστε όλα τα κορίτσια να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις (δηλαδή να μην παρεμβάλλεται αγόρι μεταξύ κοριτσιών);

(δ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 100 ατόμων σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν αγόρια στις τελευταίες 5 θέσεις;

Θέμα 2. Να βρεθεί πόσες είναι οι διαφορετικές κατανομές 45 ομοίων σφαιριδίων σε 15 διακεκρυμένα κελιά στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) (1.5 βαθμ.) Αν όλα τα κελιά είναι χωρητικότητας 10 σφαιριδίων.

(β) (1.0 βαθμ.) Αν το πρώτο κελί είναι χωρητικότητας 10 σφαιριδίων και τα υπόλοιπα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας.

Θέμα 3. (α) (1.3 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{j=m}^{\infty} \binom{j}{m} 3^{m-j}.$$

(β) (1.2 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\substack{j=0, \\ j \text{ περιττός}}}^m (2j+1) \binom{m}{j} 3^j.$$

Θέμα 4. (α) (1.2 βαθμ.) Έστω α_κ , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ μπορούν να εμφανίζονται οσοσδήποτε φορές (χωρίς περιορισμό), ενώ το στοιχείο $\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ 1 φορά. Να βρεθεί η γεννήτρια συνδυασμών $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa t^\kappa$ και να υπολογιστεί το α_κ , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

(β) (1.3 βαθμ.) Έστω β_κ , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ μπορούν να εμφανίζονται οσοσδήποτε φορές (χωρίς περιορισμό), ενώ τα στοιχεία $\omega_{\nu+1}$ και $\omega_{\nu+2}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται 0 ή 3 φορές το καθένα. Να βρεθεί η (εχθετική) γεννήτρια διατάξεων $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa \frac{t^\kappa}{\kappa!}$ και να υπολογιστεί το β_κ , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!