

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο των κεφαλαίων γραμμάτων του Ελληνικού Αλφάβητου που περιέχει 24 γράμματα, από τα οποία 7 είναι φωνήεντα (Α,Ε,Η,Ι,Ο,Υ,Ω) και τα υπόλοιπα 17 είναι σύμφωνα. Ως λέξη ορίζουμε μια επαναληπτική διάταξη στοιχείων του συνόλου αυτού (δεν είναι απαραίτητο να έχει νόημα).

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 12 γράμματα στις οποίες τα πρώτα 5 γράμματα είναι σύμφωνα και τα τελευταία 7 γράμματα είναι φωνήεντα;

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 12 γράμματα, που αρχίζουν με Η, τελειώνουν με Σ και δεν περιέχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα (δηλαδή κάθε γράμμα της λέξης εμφανίζεται μόνο μια φορά);

(γ) (1.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 12 γράμματα στις οποίες το γράμμα Ι μπορεί να εμφανίζεται το πολύ 4 φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά;

(δ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 12 γράμματα που περιέχουν όλα τα φωνήεντα και δεν περιέχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα;

Θέμα 2. (α) (1.5 βαθμ.) Δίνεται $\nu \geq 2$ ακέραιος. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \left(\kappa + \nu \binom{\nu}{\kappa} \right) \binom{\nu}{\kappa}.$$

(β) (1.5 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_\nu \leq 5 \cdot 2^\nu + 3$$

με τους περιορισμούς $x_i \geq 5 \cdot \binom{\nu}{i}$, $i = 1, 2, \dots, \nu$.

Θέμα 3. (α) (1.5 βαθμ.) Να βρείτε με πόσους τρόπους είναι δυνατό να μοιραστούν 2000 όμοιες μπάλες σε 100 (διακεκρ.) παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 10 μπάλες και το πολύ 1010.

(β) (1.5 βαθμ.) Να βρείτε με πόσους τρόπους είναι δυνατό να μοιραστούν 2000 όμοιες μπάλες σε 100 (διακεκριμένα) παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει το πολύ 550 μπάλες.

Θέμα 4. (α) (1.5 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των συνδυασμών 4 ανά 100 με επανάληψη του συνόλου $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου τα στοιχεία ω_1, ω_2 επιτρέπεται να εμφανίζονται οποιονδήποτε αριθμό φορών (χωρίς περιορισμό) το καθένα, το στοιχείο ω_3 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ μια φορά και το στοιχείο ω_4 επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών (0 ή 2 ή 4 ή ...).

(β) (1.5 βαθμ.) Δίνεται $\nu \geq 3$ ακέραιος. Έστω α_κ , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu-2}$ μπορούν να εμφανίζονται οποιονδήποτε αριθμό φορών (χωρίς περιορισμό), ενώ τα στοιχεία $\omega_{\nu-1}, \omega_\nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται τουλάχιστον 1 φορά το καθένα. Να βρεθεί η (εκθετική) γεννήτρια διατάξεων $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa \frac{t^\kappa}{\kappa!}$ και να υπολογιστεί το α_κ , $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!