

Θέμα 1. Θεωρούμε όλους τους πενταψήφιους αριθμούς από το 10000 ως το 79999 (σε κάθε τέτοιο αριθμό το πρώτο ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\{1, 2, \dots, 7\}$ και τα υπόλοιπα τέσσερα στο σύνολο $\{0, 1, \dots, 9\}$).

- (α) Πόσοι αριθμοί από αυτούς έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;
 (β) Πόσοι αριθμοί από αυτούς είναι άρτιοι;
 (γ) Πόσοι αριθμοί από αυτούς είναι άρτιοι και έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;
 (δ) Πόσοι αριθμοί από αυτούς περιέχουν το ψηφίο 3;
 (ε) Πόσοι αριθμοί από αυτούς περιέχουν ακριβώς δύο φορές το ψηφίο 8 και ακριβώς δύο φορές το ψηφίο 9;

Θέμα 2. Υπολογίστε τα αθροίσματα:

$$(α) \sum_{\kappa=0}^{\nu} \kappa(\nu - \kappa) \binom{9}{\kappa} \binom{5}{\nu - \kappa}, \quad (β) \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2j} 9^j 5^{2\nu-2j}.$$

Θέμα 3. (α) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{\nu} + x_{\nu+1} + x_{\nu+2} + \dots + x_{2\nu} = 9 + 2\nu$$

με τους περιορισμούς $x_1 \in \{0, 1\}$, $x_2 \in \{0, 1\}, \dots, x_{\nu} \in \{0, 1\}$, $x_{\nu+1} \geq 2$, $x_{\nu+2} \geq 2, \dots, x_{2\nu} \geq 2$.

(β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 30 όμοια σφαιρίδια στα κελιά k_1, k_2, \dots, k_6 , αν τα κελιά k_1, k_2 και k_6 έχουν χωρητικότητα 5 σφαιριδίων το καθένα ενώ τα k_3, k_4 και k_5 έχουν άπειρη χωρητικότητα;

Θέμα 4. Έστω α_{κ} το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των $\nu + 1$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu}\}$ ανά κ , όπου το ω_0 επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορές στη διάταξη (0 ή 2 ή 4 ή ...), ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία του Ω δεν υπάρχει περιορισμός. Υπολογίστε

(α) την εκθετική γεννήτρια,

$$E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_{\kappa} \frac{t^{\kappa}}{\kappa!}, \quad \text{και}$$

(β) τον αριθμό α_{κ} .

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!