

Θέμα 1. 20 θεατές άφησαν τα 40 διακεκριμένα παπούτσια τους (ένα δεξιό, ένα αριστερό ο καθένας) στον προθάλαμο του θεάτρου. Κλέφτης, στα σκοτεινά, άρπαξε 14 παπούτσια και τα έβαλε σε ένα σακί. Με πόσους τρόπους γίνεται η κλοπή (δηλαδή πόσες διαφορετικές συνθέσεις σακιών είναι δυνατές) σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (α) Αν το σακί δεν περιέχει παπούτσια του ίδιου θεατή.
- (β) Αν το σακί περιέχει ακριβώς 5 δεξιά παπούτσια.
- (γ) Αν το σακί περιέχει ακριβώς 5 δεξιά παπούτσια και δεν περιέχει παπούτσια του ίδιου θεατή.
- (δ) Αν το σακί περιέχει είτε και τα δυό είτε κανένα παπούτσι από κάθε ζευγάρι παπουτσιών θεατή.
- (ε) Αν το σακί περιέχει τουλάχιστον ένα δεξί και τουλάχιστον ένα αριστερό παπούτσι.

Θέμα 2. (α) Να υπολογίσετε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων του συστήματος εξισώσεων

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 8.$$

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_4 + x_5) = 33$.

Θέμα 3. (α) Έστω $\Sigma(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των $\nu + 2$ στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \dots, \nu + 2\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\nu + 1, \nu + 2$ πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά το καθένα, ενώ τα στοιχεία $1, 2, \dots, \nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται όσες φορές θέλουν. Να υπολογίσετε την συνήθη γεννήτρια, $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Sigma(\nu, \kappa)t^{\kappa}$, καθώς και τον αριθμό $\Sigma(\nu, \kappa)$.

(β) Έστω $\Delta(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των $\nu + 2$ στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \dots, \nu + 2\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία $\nu + 1, \nu + 2$ πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά το καθένα, ενώ τα στοιχεία $1, 2, \dots, \nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται όσες φορές θέλουν. Να υπολογίσετε την εκθετική γεννήτρια, $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Delta(\nu, \kappa) \frac{t^{\kappa}}{\kappa!}$, καθώς και τον αριθμό $\Delta(\nu, \kappa)$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!