

Συνδυαστική - Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Τελική εξέταση Χειμερινού εξαμήνου 2023-2024

Θέμα 1ο: 20 διακεκριμένα κορίτσια και 10 διακεκριμένα αγόρια μπαίνουν σε μία σειρά. Με πόσους τρόπους γίνεται αυτό σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- αν όλα τα αγόρια κάθονται σε συνεχόμενες θέσεις;
- αν στις πρώτες 5 θέσεις κάθονται μόνο κορίτσια;
- αν δεν υπάρχουν διαδοχικά αγόρια (δηλαδή κανένα αγόρι δεν έχει δίπλα του αγόρι);
- χωρίς περιορισμό;

Θέμα 2ο: Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k + 1}{k + 2} \binom{n}{k}.$$

Θέμα 3ο: Ρίχνουμε 20 φορές ένα ζάρι. Να υπολογιστούν

- το πλήθος των αποτελεσμάτων (δηλαδή των διατεταγμένων εικοσάδων ζαριών) στα οποία εμφανίζονται όλοι οι άρτιοι αριθμοί (δηλαδή οι 2,4,6) από τουλάχιστον μία φορά ο καθένας,
- η πιθανότητα να εμφανιστούν όλοι οι άρτιοι αριθμοί (δηλαδή οι 2,4,6) από τουλάχιστον μία φορά ο καθένας.

Θέμα 4ο: Να υπολογιστεί η συνήθης γεννήτρια $A_n(t)$ των επαναληπτικών συνδυασμών των $2n$ στοιχείων $\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots, \omega_{2n}$ ανά k , όταν τα στοιχεία $\omega_1, \dots, \omega_n$ επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ 2 φορές το καθένα, ενώ τα στοιχεία $\omega_{n+1}, \dots, \omega_{2n}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται πολλαπλάσιο του τρία αριθμό φορές (0 ή 3 ή 6 ή ...) το καθένα. Στη συνέχεια, από τη γεννήτρια, να βρείτε τον αριθμό των εν λόγω συνδυασμών.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!