ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2008 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 2008\}$.

(α) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες όλα τα πολλαπλάσια του 10 είναι διαδοχικά;

(β) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες δεν υπάρχουν διαδοχικά πολλαπλάσια του 10;

(γ) (1 βαθμός) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Ω τα οποία περιέχουν 140 ακριβώς στοιχεία από τα οποία ακριβώς 100 είναι περιττοί αριθμοί;

(δ) (1 βαθμός) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Ω που περιέχουν ακριβώς 20 στοιχεία μεγαλύτερα του 1000 και οσαδήποτε στοιχεία μικρότερα ή ίσα του 1000;

Λύση.(α) Μια μετάθεση των στοιχείων του Ω στην οποία όλα τα πολλαπλάσια του 10 είναι διαδοχικά μπορεί να κατασκευαστεί σε 3 στάδια. Στο 1ο στάδιο βάζουμε τα μη-πολλαπλάσια του 10 σε σειρά. Δεδομένου ότι τα μη-πολλαπλάσια του 10 στο Ω είναι 1808, αυτό γίνεται με $1808!$ διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο βάζουμε τα πολλαπλάσια του 10 σε σειρά. Δεδομένου ότι τα πολλαπλάσια του 10 στο Ω είναι 200, αυτό γίνεται με $200!$ διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Τέλος, στο 3ο στάδιο, διαλέγουμε μια θέση ανάμεσα σε μη-πολλαπλάσια του 10 ή πριν ή μετά από αυτά ώστε να τοποθετηθεί η σειρά που έχουμε κατασκευάσει με τα πολλαπλάσια του 10. Οι διαθέσιμες θέσεις είναι 1809, ανεξάρτητα από τις επιλογές που κάναμε στο 1ο και στο 2ο στάδιο. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά $1808!200!1809 = 1809!200!$ μεταθέσεις με τη ζητούμενη ιδιότητα.

(β) Μια μετάθεση των στοιχείων του Ω στην οποία δεν υπάρχουν διαδοχικά πολλαπλάσια του 10 μπορεί να κατασκευαστεί σε 3 στάδια. Στο 1ο στάδιο βάζουμε τα μη-πολλαπλάσια του 10 σε σειρά. Δεδομένου ότι τα μη-πολλαπλάσια του 10 στο Ω είναι 1808, αυτό γίνεται με $1808!$ διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο βάζουμε τα πολλαπλάσια του 10 σε σειρά. Δεδομένου ότι τα πολλαπλάσια του 10 στο Ω είναι 200, αυτό γίνεται με $200!$ διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Τέλος, στο 3ο στάδιο, διαλέγουμε 200 από τις 1809 θέσεις ανάμεσα στα μη-πολλαπλάσια του 10 ή πριν ή μετά από αυτά ώστε να τοποθετηθούν σε αυτές τα πολλαπλάσια του 10 με τη σειρά που τα έχουμε ήδη διατάξει στο 2ο στάδιο. Αυτό γίνεται με $\binom{1809}{200}$ τρόπους, ανεξάρτητα από τις επιλογές που κάναμε στο 1ο και στο 2ο στάδιο. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά $1808!200!\binom{1809}{200} = \frac{1808!1809!}{1609!}$ μεταθέσεις με τη ζητούμενη ιδιότητα.

(γ) Ένα υποσύνολο του Ω το οποίο περιέχει 140 ακριβώς στοιχεία από τα οποία ακριβώς 100 είναι περιττοί αριθμοί μπορεί να κατασκευαστεί σε 2 στάδια. Στο 1ο στάδιο επιλέγουμε 100 από τους 1004 περιττούς του Ω για να μπουν στο υποσύνολο. Αυτό γίνεται με $\binom{1004}{100}$ διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο επιλέγουμε 40 από τους 1004 άρτιους του Ω για να μπουν στο υποσύνολο ώστε να συμπληρωθεί ο συνολικός αριθμός 140 στοιχείων που πρέπει να περιέχει. Αυτό γίνεται με $\binom{1004}{40}$ διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά $\binom{1004}{100}\binom{1004}{40}$ υποσύνολα με τη ζητούμενη ιδιότητα.

(δ) Ένα υποσύνολο του Ω το οποίο περιέχει ακριβώς 20 στοιχεία μεγαλύτερα του 1000 και οσαδήποτε στοιχεία μικρότερα ή ίσα του 1000 μπορεί να κατασκευαστεί σε 2 στάδια. Στο 1ο στάδιο επιλέγουμε 20 στοιχεία από το σύνολο $\{1001, 1002, 1003, \ldots, 2008\}$ για να μπουν στο υποσύνολο. Αυτό γίνεται με $\binom{1008}{20}$ διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο διαλέγουμε κάποια στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ για να μπουν στο υποσύνολο. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να διαλέξουμε ένα υποσύνολο του $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ και γίνεται με 2^{1000} διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά $\binom{1008}{20}2^{1000}$ υποσύνολα με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Θέμα 2. Θεωρούμε το αλφάβητο $\Omega = \{F, G, H, I\}$.

(α) (2 βαθμοί) Πόσες είναι οι διαφορετικές λέξεις 8 γραμμάτων που περιέχουν ακριβώς 2 φορές κάθε γράμμα του Ω και δεν έχουν ίδια διαδοχικά γράμματα;

(β) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι διαφορετικές λέξεις 12 γραμμάτων που περιέχουν ακριβώς 3 φορές κάθε γράμμα του Ω, αρχίζουν με F και τελειώνουν με G;

Λύση. (α) Χρησιμοποιούμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού και θεωρούμε ως βασικό σύνολο αναφοράς το σύνολο των λέξεων 8 γραμμάτων που μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας ακριβώς 2 φορές κάθε γράμμα του Ω. Το σύνολο αυτό έχει $\frac{8!}{(2!)^4}$ στοιχεία, όσες οι μεταθέσεις των 4 ειδών στοιχείων F, G, H, I που εμφανίζονται 2 φορές το καθένα. Ορίζουμε A_1 να είναι το σύνολο των λέξεων 8 γραμμάτων που μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας ακριβώς 2 φορές κάθε γράμμα του Ω ώστε τα 2 F να εμφανίζονται διαδοχικά. Ομοίως ορίζονται τα σύνολα A_2, A_3, A_4 για τα 2 G, τα 2 H και τα 2 I αντίστοιχα. Ο ζητούμενος αριθμός είναι το $N(A_1'A_2'A_3'A_4')$. Έχουμε ότι $N(A_1) = \frac{7!}{1!(2!)^3}$, αφού τα 2 F εμφανίζονται στις λέξεις του A_1 διαδοχικά και επομένως μπορούν να θεωρηθούν ως ένα γράμμα FF οπότε έχουμε μεταθέσεις των 4 ειδών στοιχείων FF, G, H, I που εμφανίζονται 1,2,2,2 φορές αντίστοιχα. Ομοίως $N(A_1A_2) = \frac{6!}{(1!)^2(2!)^2}$, $N(A_1A_2A_3) = \frac{5!}{(1!)^3(2!)^1}$, $N(A_1A_2A_3A_4) = \frac{4!}{(1!)^4}$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ο $\frac{8!}{(2!)^4} - \binom{4}{1}\frac{7!}{1!(2!)^3} + \binom{4}{2}\frac{6!}{(1!)^2(2!)^2} - \binom{4}{3}\frac{5!}{(1!)^3(2!)^1} + \binom{4}{4}\frac{4!}{(1!)^4}$.

(β) Για να κατασκευάσουμε μια λέξη 12 γραμμάτων χρησιμοποιώντας ακριβώς 3 φορές κάθε γράμμα του Ω ώστε να αρχίζει με F και να τελειώνει με G, αρκεί να βάλουμε σε σειρά τα 10 γράμματα $F, F, G, G, H, H, H, I, I, I$ που δεν εμφανίζονται στις άκρες. Αυτό μπορεί να γίνει με $\frac{10!}{2!2!3!3!}$ τρόπους αφού πρόκειται για μεταθέσεις των 4 ειδών στοιχείων F, G, H, I που εμφανίζονται 2,2,3,3 φορές αντίστοιχα.

Θέμα 3. (α) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\rho=0}^{\varkappa} \frac{1}{\rho+1}\binom{\varkappa}{\rho}^2.$$

(β) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu} \frac{\varkappa}{\nu}\binom{\nu}{\varkappa}5^{\varkappa}.$$

Λύση. (α)Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{\rho=0}^{\varkappa} \frac{1}{\rho+1}\binom{\varkappa}{\rho}^2 &= \sum_{\rho=0}^{\varkappa} \frac{1}{\rho+1}\binom{\varkappa}{\rho}\binom{\varkappa}{\varkappa-\rho} = \sum_{\rho=0}^{\varkappa} \frac{\varkappa!}{(\rho+1)\rho!(\varkappa-\rho)!}\binom{\varkappa}{\varkappa-\rho} = \sum_{\rho=0}^{\varkappa} \frac{\varkappa!}{(\rho+1)!(\varkappa-\rho)!}\binom{\varkappa}{\varkappa-\rho} \\
&= \frac{1}{\varkappa+1}\sum_{\rho=0}^{\varkappa} \frac{(\varkappa+1)!}{(\rho+1)!(\varkappa-\rho)!}\binom{\varkappa}{\varkappa-\rho} = \frac{1}{\varkappa+1}\sum_{\rho=0}^{\varkappa}\binom{\varkappa+1}{\rho+1}\binom{\varkappa}{\varkappa-\rho} \\
&= \frac{1}{\varkappa+1}\sum_{j=1}^{\varkappa+1}\binom{\varkappa+1}{j}\binom{\varkappa}{\varkappa+1-j} = \frac{1}{\varkappa+1}\left(\binom{\varkappa+1+\varkappa}{\varkappa+1} - 0\right) = \frac{1}{\varkappa+1}\binom{2\varkappa+1}{\varkappa+1},
\end{aligned}$$

όπου στην 1η ισότητα χρησιμοποιήθηκε η συμμετρική ιδιότητα των διωνυμικών συντελεστών ($\binom{\varkappa}{\rho} = \binom{\varkappa}{\varkappa-\rho}$), στην 6η ισότητα χρησιμοποιήθηκε η αλλαγή μεταβλητής $j = \rho+1$ και στην 7η ισότητα ο τύπος του Cauchy.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{\varkappa=0}^{\nu} \frac{\varkappa}{\nu}\binom{\nu}{\varkappa}5^{\varkappa} &= \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{\varkappa\nu!}{\nu\varkappa!(\nu-\varkappa)!}5^{\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{(\nu-1)!}{(\varkappa-1)!(\nu-\varkappa)!}5^{\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{\varkappa-1}5^{\varkappa} \\
&= \sum_{j=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{j}5^{j+1} = 5\sum_{j=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{j}5^{j} \\
&= 5\cdot(1+5)^{\nu-1} = 5\cdot 6^{\nu-1},
\end{aligned}$$

όπου στην 4η ισότητα χρησιμοποιήθηκε η αλλαγή μεταβλητής $j = \varkappa-1$ και στην 6η ισότητα το διωνυμικό θεώρημα του Newton.

Θέμα 4. Έστω $a_{\varkappa}$, $\varkappa = 0,1,2,\ldots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2008}\}$ ανά $\varkappa$, όπου το ω_1 εμφανίζεται πολλαπλάσιο του 9 αριθμό φορών $(0, 9, 18, 27, \ldots$ φορές), το ω_2 εμφανίζεται 0 ή 3 ή 6 φορές, το ω_3 εμφανίζεται το πολύ 2 φορές και τα υπόλοιπα $\omega_{\varkappa}$, $\varkappa = 4, 5, \ldots, 2008$ εμφανίζονται χωρίς περιορισμό $(0, 1, 2, 3, \ldots$ φορές).

(α) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_{\varkappa}t^{\varkappa}.$$

(β) Να βρεθεί ένας όσο το δυνατόν απλούστερος τύπος για τον υπολογισμό του πλήθους $a_{\varkappa}$ των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2008}\}$ ανά $\varkappa$ που πληρούν τις παραπάνω συνθήκες.

Λύση. (α) Οι (απλοποιημένες) απαριθμήτριες των στοιχείων $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ είναι $A_1(t) = 1+t^9+t^{18}+t^{27}\cdots = \frac{1}{1-t^9}$, $A_2(t) = 1 + t^3 + t^6$, $A_3(t) = 1 + t + t^2$ αντίστοιχα ενώ για τα $\omega_\varkappa$, $\varkappa = 4, 5, \ldots, 2008$ είναι $A_\varkappa(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \frac{1}{1-t}$. Επομένως η γεννήτρια των συνδυασμών είναι

$$A(t) = A_1(t)A_2(t)\cdots A_{2008}(t) = \frac{1}{1-t^9}(1+t^3+t^6)(1+t+t^2)\left(\frac{1}{1-t}\right)^{2005}.$$

(β) Είναι $A(t) = \frac{1}{1-t^9}\frac{1-t^9}{1-t^3}\frac{1-t^3}{1-t}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{2005} = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{2006}$ οπότε το $a_\varkappa$ συμπίπτει με το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών 2006 ανά $\varkappa$: $a_\varkappa = \binom{2005+\varkappa}{\varkappa}$.