ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

(α) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες το στοιχείο 1 βρίσκεται σε κάποια από τις θέσεις 1 έως 200 και το στοιχείο 2 σε κάποια από τις θέσεις 201 έως 2008;

(β) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα στοιχεία 1, 2 και 3 βρίσκονται σε κάποιες από τις θέσεις 1 έως 200;

(γ) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα περιττά στοιχεία καταλαμβάνουν περιττές θέσεις;

Λύση. (α) Μια μετάθεση των στοιχείων του Ω στην οποία το στοιχείο 1 βρίσκεται σε κάποια από τις θέσεις 1 έως 200 και το στοιχείο 2 σε κάποια από τις θέσεις 201 έως 2008 μπορεί να κατασκευαστεί σε 3 στάδια. Στο 1ο στάδιο διαλέγουμε μια θέση από τις θέσεις 1 έως 200 για να μπει το στοιχείο 1. Αυτό γίνεται με 200 διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο διαλέγουμε μια θέση από τις θέσεις 201 έως 2008 για να μπει το στοιχείο 2. Αυτό γίνεται με 1808 διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Τέλος στο 3ο στάδιο βάζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία σε σειρά στις υπόλοιπες 2006 θέσεις. Αυτό γίνεται με 2006! διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από τις επιλογές που κάναμε στο 1ο και στο 2ο στάδιο. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των μεταθέσεων με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι

$$200 \cdot 1808 \cdot 2006!.$$

(β) Μια μετάθεση των στοιχείων του Ω στην οποία τα στοιχεία 1, 2 και 3 βρίσκονται σε κάποιες από τις θέσεις 1 έως 200 μπορεί να κατασκευαστεί σε 3 στάδια. Στο 1ο στάδιο διαλέγουμε τις 3 θέσεις από τις θέσεις 1 έως 200 στις οποίες θα τοποθετηθούν τα στοιχεία 1, 2 και 3. Αυτό γίνεται με $\binom{200}{3}$ διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο διατάσουμε τα στοιχεία 1, 2 και 3 ώστε να μπουν στις προεπιλεγμένες θέσεις. Αυτό γίνεται με 3! τρόπους, ανεξάρτητα από την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Τέλος στο 3ο στάδιο βάζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία σε σειρά στις υπόλοιπες 2005 θέσεις. Αυτό γίνεται με 2005! διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από τις επιλογές που κάναμε στο 1ο και στο 2ο στάδιο. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των μεταθέσεων με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι

$$\binom{200}{3} \cdot 3! \cdot 2005! = 200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 2005!.$$

(γ) Μια μετάθεση των στοιχείων του Ω στην οποία τα περιττά στοιχεία καταλαμβάνουν περιττές θέσεις γίνεται σε 2 στάδια. Στο 1ο στάδιο βάζουμε τα 1004 περιττά στοιχεία στη σειρά ώστε να τοποθετηθούν κατόπιν με αυτή τη σειρά στις περιττές θέσεις. Αυτό γίνεται με 1004! διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο βάζουμε τα 1004 άρτια στοιχεία στη σειρά για να τοποθετηθούν κατόπιν με αυτή τη σειρά στις άρτιες θέσεις. Αυτό γίνεται με 1004! διαφορετικούς τρόπους ανεξάρτητα με την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Συνεπώς από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των μεταθέσεων με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι

$$1004! \cdot 1004! = (1004!)^2.$$

Θέμα 2. (α) (2 βαθμοί) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 2008,$$

με τους περιορισμούς $10 \leq x_i \leq 200$ για $i = 1, 2, \ldots, 10$ και $x_i \geq 0$ για $i = 11, 12, \ldots, 20$.

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} \leq 2008,$$

με τον περιορισμό ο x_{20} να είναι άρτιος.

Λύση. (α) Χρησιμοποιούμε τον 1–1 μετασχηματισμό των μεταβλητών $y_i = x_i - 10$ για $i = 1, 2, \ldots, 10$ και $y_i = x_i$ για $i = 11, 12, \ldots, 20$. Έτσι το πρόβλημα του προσδιορισμού του πλήθους των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της αρχικής εξίσωσης με τους αρχικούς περιορισμούς ανάγεται στο προσδιορισμό του πλήθους των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{20} = 1908,$$

με τους περιορισμούς $0 \leq y_i \leq 190$ για $i = 1, 2, \ldots, 10$ και $y_i \geq 0$ για $i = 11, 12, \ldots, 20$.

Θέτουμε Ω το σύνολο των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης αυτής και A_i να είναι το υποσύνολο του Ω που περιλαμβάνει τις λύσεις με $y_i \geq 191$, για $i = 1, 2, \ldots, 10$. Τότε το ζητούμενο πλήθος λύσεων είναι το $N(A_1' A_2' \cdots A_{10}')$. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού. Προς το σκοπό αυτό υπολογίζουμε το $N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k})$ για $k = 1, 2, \ldots, 10$ και κάθε υποσύνολο δεικτών $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 10\}$. Έχουμε ότι το $N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k})$ είναι το πλήθος των μη–αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{20} = 1908,$$

με τους περιορισμούς $y_i \geq 191$ για $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ και $y_i \geq 0$ για $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Θέτοντας νέες μεταβλητές $w_i = y_i - 191$ για $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ και $w_i = y_i$ για $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ έχουμε να βρούμε το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_{20} = 1908 - 191k$$

και επομένως

$$N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \binom{20 + 1908 - 191k - 1}{1908 - 191k},$$

για $k = 1, 2, \ldots, 9$, ενώ για $k = 10$ είναι 0. Χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού έχουμε τώρα ότι το ζητούμενο πλήθος λύσεων είναι

$$\begin{aligned} N(A'_1 A'_2 \cdots A'_{10}) &= \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=0}^{9} (-1)^k \binom{10}{k} \binom{20 + 1908 - 191k - 1}{1908 - 191k}. \end{aligned}$$

(β) Το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} \leq 2008$$

με τον περιορισμό ο x_{20} να είναι άρτιος ταυτίζεται με το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} + x_{21} = 2008$$

με τον περιορισμό ο x_{20} να είναι άρτιος. Πράγματι οι ακέραιες μη–αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_{20})$ της ανίσωσης βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τις ακέραιες μη–αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_{20}, x_{21})$ της εξίσωσης, θέτοντας $x_{21} = 2008 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{20}$. Το σύνολο των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης με τον περιορισμό ο x_{20} να είναι άρτιος μπορεί να θεωρηθεί η ξένη ένωση των συνόλων των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης όπου ο x_{20} παίρνει την τιμή $2k$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, 1004$. Το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης που ο x_{20} παίρνει την τιμή $2k$ είναι $\binom{20+2008-2k-1}{2008-2k}$. Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος λύσεων είναι:

$$\sum_{k=0}^{1004} \binom{20 + 2008 - 2k - 1}{2008 - 2k}.$$

Θέμα 3. (α) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \binom{n}{k}, \; n \in \mathbb{N}.$$

(β) (2 βαθμοί) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+1}{j} \binom{m+j+1}{2j+1} \frac{(-1)^j}{m+j+1}, \; m \in \mathbb{N}.$$

Λύση. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+1) \frac{n!}{(k+2)!(n-k)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} (k+1) \frac{n!(n+1)(n+2)}{(k+2)!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} (k+1) \frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n+2}{k+2}. \end{aligned}$$

Κάνουμε τώρα την αλλαγή μεταβλητής $j = k+2$ οπότε έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{j=2}^{n+2}(j-1)\binom{n+2}{j} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{j=2}^{n+2} j\binom{n+2}{j} - \sum_{j=2}^{n+2}\binom{n+2}{j}\right)$$

Είναι όμως

$$\sum_{j=2}^{n+2} j\binom{n+2}{j} = (n+2)\sum_{j=2}^{n+2}\binom{n+1}{j-1} = (n+2)\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i} = (n+2)(2^{n+1}-1)$$

και

$$\sum_{j=2}^{n+2}\binom{n+2}{j} = 2^{n+2} - (n+2) - 1 = 2^{n+2} - n - 3,$$

οπότε τελικά

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \frac{(n+2)(2^{n+1}-1) - 2^{n+2} + n + 3}{(n+1)(n+2)}.$$

(β) Αναπτύσουμε τους διωνυμικούς συντελεστές σε παραγοντικά και κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\binom{2j+1}{j}\binom{m+j+1}{2j+1}\frac{(-1)^j}{m+j+1} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2j+1)!}{j!(j+1)!}\frac{(m+j+1)!}{(2j+1)!(m-j)!}\frac{(-1)^j}{m+j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(m+j)!}{j!(j+1)!(m-j)!}
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με $m!$ ώστε να δημιουργηθούν διωνυμικοί συντελεστές. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\binom{2j+1}{j}\binom{m+j+1}{2j+1}\frac{(-1)^j}{m+j+1} &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(m+j)!m!}{j!(j+1)!(m-j)!m!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j+1}\binom{m+j}{j}\binom{m}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j+1}(-1)^j\binom{(m+1)+j-1}{j}\binom{m}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j+1}\binom{-(m+1)}{j}\binom{m}{j} \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-(m+1)}{j}\binom{m+1}{j+1} \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-(m+1)}{j}\binom{m+1}{m-j} \\
&= \frac{1}{m+1}\binom{0}{m} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{αν } m = 0, \\ 0 & \text{αν } m \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Θέμα 4. Έστω $a_\varkappa$, $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2008}\}$ ανά $\varkappa$, όπου τα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{1000}$ εμφανίζονται το πολύ 1 φορά το καθένα, τα

$\omega_{1001}, \omega_{1002}, \ldots, \omega_{1999}$ εμφανίζονται άρτιο αριθμό φορών (δηλαδή 0 ή 2 ή 4 κλπ. φορές) το καθένα και τα $\omega_{2000}, \omega_{2001} \ldots, \omega_{2008}$ εμφανίζονται ακριβώς 1 φορά το καθένα.

(α) (1 βαθμός) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa t^\varkappa.$$

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί ένας όσο το δυνατόν απλούστερος τύπος για τον υπολογισμό του πλήθους $a_\varkappa$ των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2008}\}$ ανά $\varkappa$ που πληρούν τις παραπάνω συνθήκες.

Λύση. (α) Οι (απλοποιημένες) απαριθμήτριες των στοιχείων $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{1000}$ είναι $A_1(t) = 1+t, A_2(t) = 1+t, \ldots, A_{1000} = 1+t$. Για τα στοιχεία $\omega_{1001}, \omega_{1002}, \ldots, \omega_{1999}$ είναι $A_{1001}(t) = 1 + t^2 + t^4 + \ldots = \frac{1}{1-t^2}$, $A_{1002}(t) = \frac{1}{1-t^2}, \ldots, A_{1999}(t) = \frac{1}{1-t^2}$, ενώ για τα $\omega_{2000}, \omega_{2001}, \ldots, \omega_{2008}$ είναι $A_{2000}(t) = t, A_{2001}(t) = t, \ldots, A_{2008}(t) = t$.

Επομένως η γεννήτρια των συνδυασμών είναι

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1(t)A_2(t)\cdots A_{2008}(t) \\ &= (1+t)^{1000}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)^{999} t^9 = (1+t)\left(\frac{1}{1-t}\right)^{999} t^9 \\ &= (t^9 + t^{10})\left(\frac{1}{1-t}\right)^{999}. \end{aligned}$$

(β) Είναι

$$\begin{aligned} A(t) &= (t^9 + t^{10})\left(\frac{1}{1-t}\right)^{999} = (t^9 + t^{10}) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{999+j-1}{j} t^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{999+j-1}{j} t^{j+9} + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{999+j-1}{j} t^{j+10} \\ &= \sum_{k=9}^{\infty} \binom{989+k}{k-9} t^k + \sum_{k=10}^{\infty} \binom{988+k}{k-10}, \end{aligned}$$

οπότε

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{αν } k = 0, 1, \ldots, 8, \\ \binom{989+k}{k-9} = 1 & \text{αν } k = 9, \\ \binom{989+k}{k-9} + \binom{988+k}{k-10} & \text{αν } k = 10, 11, \ldots. \end{cases}$$