ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

(α) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα άρτια στοιχεία καταλαμβάνουν τις τελευταίες 1004 θέσεις (δηλαδή τις θέσεις $1005, 1006, \ldots, 2008$);

(β) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες το στοιχείο 2008 βρίσκεται σε κάποια από τις θέσεις 1 έως 1000 και το στοιχείο 2007 σε κάποια από τις θέσεις 1001 έως 2008;

(γ) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα στοιχεία 2006, 2007 και 2008 βρίσκονται σε κάποιες από τις θέσεις 1 έως 1000;

Λύση. (α) Μια μετάθεση των στοιχείων του Ω στην οποία τα άρτια στοιχεία καταλαμβάνουν τις τελευταίες 1004 θέσεις γίνεται σε 2 στάδια. Στο 1ο στάδιο βάζουμε τα 1004 άρτια στοιχεία στη σειρά ώστε να τοποθετηθούν κατόπιν με αυτή τη σειρά στις τελευταίες 1004 θέσεις. Αυτό γίνεται με 1004! διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο βάζουμε τα 1004 περιττά στοιχεία στη σειρά για να τοποθετηθούν κατόπιν με αυτή τη σειρά στις πρώτες 1004 θέσεις. Αυτό γίνεται με 1004! διαφορετικούς τρόπους ανεξάρτητα με την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Συνεπώς από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των μεταθέσεων με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι

$$1004! \cdot 1004! = (1004!)^2.$$

(β) Μια μετάθεση των στοιχείων του Ω στην οποία το στοιχείο 2008 βρίσκεται σε κάποια από τις θέσεις 1 έως 1000 και το στοιχείο 2007 σε κάποια από τις θέσεις 1001 έως 2008 μπορεί να κατασκευαστεί σε 3 στάδια. Στο 1ο στάδιο διαλέγουμε μια θέση από τις θέσεις 1 έως 1000 για να μπει το στοιχείο 2008. Αυτό γίνεται με 1000 διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο διαλέγουμε μια θέση από τις θέσεις 1001 έως 2008 για να μπει το στοιχείο 2007. Αυτό γίνεται με 1008 διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Τέλος στο 3ο στάδιο βάζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία σε σειρά στις υπόλοιπες 2006 θέσεις. Αυτό γίνεται με 2006! διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από τις επιλογές που κάναμε στο 1ο και στο 2ο στάδιο. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των μεταθέσεων με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι

$$1000 \cdot 1008 \cdot 2006!.$$

(γ) Μια μετάθεση των στοιχείων του Ω στην οποία τα στοιχεία 2006, 2007 και 2008 βρίσκονται σε κάποιες από τις θέσεις 1 έως 1000 μπορεί να κατασκευαστεί σε 3 στάδια. Στο 1ο στάδιο διαλέγουμε τις 3 θέσεις από τις θέσεις 1 έως 1000 στις οποίες θα τοποθετηθούν τα στοιχεία 2006, 2007 και 2008. Αυτό γίνεται με $\binom{1000}{3}$ διαφορετικούς τρόπους. Στο 2ο στάδιο διατάσουμε τα στοιχεία 2006, 2007 και 2008 ώστε να μπουν στις προεπιλεγμένες θέσεις. Αυτό γίνεται με 3! τρόπους, ανεξάρτητα από την επιλογή που κάναμε στο 1ο στάδιο. Τέλος στο 3ο στάδιο βάζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία σε σειρά στις υπόλοιπες

2005 θέσεις. Αυτό γίνεται με 2005! διαφορετικούς τρόπους, ανεξάρτητα από τις επιλογές που κάναμε στο 1ο και στο 2ο στάδιο. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των μεταθέσεων με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι

$$\binom{1000}{3} \cdot 3! \cdot 2005! = 1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 2005!.$$

Θέμα 2. (α) (1 βαθμός) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} \leq 2008,$$

με τον περιορισμό ο x_1 να είναι περιττός.

(β) (2 βαθμοί) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 2008,$$

με τους περιορισμούς $20 \leq x_i \leq 400$ για $i = 1, 2, \ldots, 5$ και $x_i \geq 0$ για $i = 6, 7, \ldots, 10$.

Λύση. (α) Το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} \leq 2008$$

με τον περιορισμό ο x_1 να είναι περιττός ταυτίζεται με το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} + x_{11} = 2008$$

με τον περιορισμό ο x_1 να είναι περιττός. Πράγματι οι ακέραιες μη–αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ της ανίσωσης βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τις ακέραιες μη–αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_{20}, x_{11})$ της εξίσωσης, θέτοντας $x_{11} = 2008 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{10}$. Το σύνολο των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης με τον περιορισμό ο x_1 να είναι περιττός μπορεί να θεωρηθεί η ξένη ένωση των συνόλων των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης όπου ο x_1 παίρνει την τιμή $2k+1$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, 1003$. Το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης που ο x_1 παίρνει την τιμή $2k+1$ είναι $\binom{10+2008-(2k+1)-1}{2008-(2k+1)}$. Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος λύσεων είναι:

$$\sum_{k=0}^{1003} \binom{2016-2k}{2007-2k}.$$

(β) Χρησιμοποιούμε τον 1–1 μετασχηματισμό των μεταβλητών $y_i = x_i - 20$ για $i = 1, 2, \ldots, 5$ και $y_i = x_i$ για $i = 6, 7, \ldots, 10$. Έτσι το πρόβλημα του προσδιορισμού του πλήθους των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της αρχικής εξίσωσης με τους αρχικούς περιορισμούς ανάγεται στο προσδιορισμό του πλήθους των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{10} = 1908,$$

με τους περιορισμούς $0 \leq y_i \leq 380$ για $i = 1, 2, \ldots, 5$ και $y_i \geq 0$ για $i = 6, 7, \ldots, 10$.

Θέτουμε Ω το σύνολο των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης αυτής και A_i να είναι το υποσύνολο του Ω που περιλαμβάνει τις λύσεις με $y_i \geq 381$, για $i = 1, 2, \ldots, 5$. Τότε το ζητούμενο πλήθος λύσεων είναι το $N(A_1' A_2' \cdots A_5')$. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού. Προς το σκοπό αυτό υπολογίζουμε το $N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k})$ για $k = 1, 2, \ldots, 5$ και κάθε υποσύνολο δεικτών $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 5\}$. Έχουμε ότι το $N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k})$ είναι το πλήθος των μη–αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{10} = 1908,$$

με τους περιορισμούς $y_i \geq 381$ για $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ και $y_i \geq 0$ για $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Θέτοντας νέες μεταβλητές $w_i = y_i - 381$ για $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ και $w_i = y_i$ για $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ έχουμε να βρούμε το πλήθος των ακέραιων μη–αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_{10} = 1908 - 381k$$

και επομένως

$$N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \binom{10 + 1908 - 381k - 1}{1908 - 381k}.$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού έχουμε τώρα ότι το ζητούμενο πλήθος λύσεων είναι

$$\begin{aligned} N(A_1' A_2' \cdots A_5') &= \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} \binom{10 + 1908 - 381k - 1}{1908 - 381k}. \end{aligned}$$

Θέμα 3. (α) (2 βαθμοί) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

(β) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j+1} \binom{m}{j-1}, \ m \in \mathbb{N}.$$

Λύση. (α) Αναπτύσουμε τους διωνυμικούς συντελεστές σε παραγοντικά και κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις ως εξής:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(2k)!(n-k)!} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!(k+1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με $n!$ ώστε να δημιουργηθούν διωνυμικοί συντελεστές. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k)!n!}{k!(k+1)!(n-k)!n!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}(-1)^k\binom{(n+1)+k-1}{k}\binom{n}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\binom{-(n+1)}{k}\binom{n}{k}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(n+1)}{k}\binom{n+1}{k+1}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(n+1)}{k}\binom{n+1}{n-k}\\
&= \frac{1}{n+1}\binom{0}{n}\\
&= \begin{cases} 1 & \text{αν } n=0,\\ 0 & \text{αν } n\neq 0.\end{cases}
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $k=j-1$, ότι:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{j+1}\binom{m}{j-1} &= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k+2}\binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{k+1}{(k+1)(k+2)}\binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{k+1}{(k+1)(k+2)}\frac{m!}{k!(m-k)!}\\
&= \sum_{k=0}^{m}(k+1)\frac{m!}{(k+2)!(m-k)!} = \frac{1}{(m+1)(m+2)}\sum_{k=0}^{m}(k+1)\frac{m!(m+1)(m+2)}{(k+2)!(m-k)!}\\
&= \frac{1}{(m+1)(m+2)}\sum_{k=0}^{m}(k+1)\frac{(m+2)!}{(k+2)!(m-k)!}\\
&= \frac{1}{(m+1)(m+2)}\sum_{k=0}^{m}(k+1)\binom{m+2}{k+2}.
\end{aligned}$$

Κάνουμε τώρα την αλλαγή μεταβλητής $i=k+2$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{j+1}\binom{m}{j-1} &= \frac{1}{(m+1)(m+2)}\sum_{i=2}^{m+2}(i-1)\binom{m+2}{i}\\
&= \frac{1}{(m+1)(m+2)}\left(\sum_{i=2}^{m+2}i\binom{m+2}{i}-\sum_{i=2}^{m+2}\binom{m+2}{i}\right)
\end{aligned}$$

Είναι όμως

$$\sum_{i=2}^{m+2}i\binom{m+2}{i} = (m+2)\sum_{i=2}^{m+2}\binom{m+1}{i-1} = (m+2)\sum_{s=1}^{m+1}\binom{m+1}{s} = (m+2)(2^{m+1}-1)$$

και

$$\sum_{i=2}^{m+2}\binom{m+2}{i} = 2^{m+2}-(m+2)-1 = 2^{m+2}-m-3,$$

οπότε τελικά

$$\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j+1}\binom{m}{j-1} = \frac{(m+2)(2^{m+1}-1)-2^{m+2}+m+3}{(m+1)(m+2)}.$$

Θέμα 4. Έστω $a_\varkappa$, $\varkappa = 0,1,2,\ldots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{2008}\}$ ανά $\varkappa$, όπου τα $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{999}$ εμφανίζονται περιττό αριθμό φορών (δηλαδή 1 ή 3 ή 5 κλπ. φορές) το καθένα, τα $\omega_{1000},\omega_{1001},\ldots,\omega_{1999}$ εμφανίζονται το πολύ 1 φορά το καθένα και τα $\omega_{2000},\omega_{2001}\ldots,\omega_{2008}$ εμφανίζονται ακριβώς 2 φορές το καθένα.

(α) (1 βαθμός) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa t^\varkappa.$$

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί ένας όσο το δυνατόν απλούστερος τύπος για τον υπολογισμό του πλήθους $a_\varkappa$ των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{2008}\}$ ανά $\varkappa$ που πληρούν τις παραπάνω συνθήκες.

Λύση. (α) Οι (απλοποιημένες) απαριθμήτριες των στοιχείων $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{999}$ είναι $A_1(t) = t+t^3+t^5+\ldots = \frac{t}{1-t^2}, A_2(t) = \frac{t}{1-t^2},\ldots,A_{999} = \frac{t}{1-t^2}$. Για τα στοιχεία $\omega_{1000},\omega_{1001},\ldots,\omega_{1999}$ είναι $A_{1000}(t) = 1+t$, $A_{1001}(t) = 1+t,\ldots,A_{1999}(t) = 1+t$, ενώ για τα $\omega_{2000},\omega_{2001},\ldots,\omega_{2008}$ είναι $A_{2000}(t) = t^2, A_{2001}(t) = t^2,\ldots,A_{2008}(t) = t^2$.

Επομένως η γεννήτρια των συνδυασμών είναι

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1(t)A_2(t)\cdots A_{2008}(t) \\ &= \left(\frac{t}{1-t^2}\right)^{999}(1+t)^{1000}(t^2)^9 = (1+t)\left(\frac{1}{1-t}\right)^{999} t^{1017} \\ &= (t^{1017}+t^{1018})\left(\frac{1}{1-t}\right)^{999}. \end{aligned}$$

(β) Είναι

$$\begin{aligned} A(t) &= (t^{1017}+t^{1018})\left(\frac{1}{1-t}\right)^{999} = (t^{1017}+t^{1018})\sum_{j=0}^{\infty}\binom{999+j-1}{j}t^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{999+j-1}{j}t^{j+1017} + \sum_{j=0}^{\infty}\binom{999+j-1}{j}t^{j+1018} \\ &= \sum_{k=1017}^{\infty}\binom{k-19}{k-1017}t^k + \sum_{k=1018}^{\infty}\binom{k-20}{k-1018}, \end{aligned}$$

οπότε

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{αν } k = 0,1,\ldots,1016, \\ \binom{k-19}{k-1017} = 1 & \text{αν } k = 1017, \\ \binom{k-19}{k-1017} + \binom{k-20}{k-1018} & \text{αν } k = 1018, 1019, \ldots. \end{cases}$$