Λύσεις Θεμάτων Ομάδας Α Συνδυαστική Ι, Φεβ. 2010

Θέμα 1:

(α) $\binom{50}{25}\binom{50}{0}=\binom{50}{25}$.

(β) 2^{50}.

(γ) $\binom{50}{25}2^{50}$.

(δ) $\sum_{k=0}^{25}\binom{50}{k}$, το οποίο μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής:

$$\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}=2^{50}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{25}\binom{50}{k}+\sum_{k=26}^{50}\binom{50}{k}=2^{50}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{25}\binom{50}{k}+\sum_{k=26}^{50}\binom{50}{50-k}=2^{50}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{25}\binom{50}{k}+\sum_{j=0}^{24}\binom{50}{j}=2^{50}$$
$$\Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{25}\binom{50}{k}=2^{50}+\binom{50}{25}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{25}\binom{50}{k}=\frac{1}{2}\left(2^{50}+\binom{50}{25}\right).$$

Θέμα 2:

(α)
$$\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k+1}\binom{\nu}{k}^2=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k+1}\binom{\nu}{k}\binom{\nu}{\nu-k}=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{\nu+1}\binom{\nu+1}{k+1}\binom{\nu}{\nu-k}$$
$$=\frac{1}{\nu+1}\sum_{j=1}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{j}\binom{\nu}{\nu+1-j}=\frac{1}{\nu+1}\left(\binom{2\nu+1}{\nu+1}-\binom{\nu+1}{0}\underbrace{\cancel{\binom{\nu}{\nu+1}}}_{0}\right)$$
$$=\frac{1}{\nu+1}\binom{2\nu+1}{\nu+1}.$$

(β)
$$\sum_{k=0}^{\nu}(k^2-1)\binom{\nu}{k}2^k=\sum_{k=0}^{\nu}(k(k-1)+k-1)\binom{\nu}{k}2^k$$
$$=\sum_{k=2}^{\nu}k(k-1)\binom{\nu}{k}2^k+\sum_{k=1}^{\nu}k\binom{\nu}{k}2^k-\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}2^k$$
$$=4\nu(\nu-1)\sum_{k=2}^{\nu}\binom{\nu-2}{k-2}2^{k-2}+2\nu\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{k-1}2^{k-1}-\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}2^k$$
$$=4\nu(\nu-1)3^{\nu-2}+2\nu 3^{\nu-1}-3^{\nu}.$$

Θέμα 3:

Κάθε τρόπος αποβίβασης παριστάνεται από μια διατεταγμένη 20-άδα που τα στοιχεία της παίρνουν τιμές από 1 έως 5. Το i στοιχείο δείχνει τον όροφο αποβίβασης για το άτομο i.

(α) Ω: Σύνολο τρόπων αποβίβασης

A_i: Σύνολο τρόπων αποβίβασης που κανένα άτομο δεν αποβιβάζεται στον όροφο i, $i=1,2,3$.

Ζητάμε το $N(A_1'A_2'A_3')$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

$$N(A_1'A_2'A_3') = N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) + N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$$
$$= 5^{20} - 3\cdot 4^{20} + 3\cdot 3^{20} + 2^{20}$$

(β) Θα πρέπει να αποβιβασθούν 4 άτομα σε κάθε όροφο. Επομένως ζητάμε το πλήθος των διατεταγμένων 20-άδων με 4 "1", 4 "2", 4 "3", 4 "4" και 4 "5". Είναι μεταθέσεις 5 ειδών στοιχείων που το καθένα εμφανίζεται 4 φορές των οποίων το πλήθος είναι $\frac{20!}{(4!)^5}$.

Θέμα 4:

(α) $A(t) = (t^5+t^6+t^7+\dots)^\nu = t^{5\nu}(1-t)^{-\nu}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t) = t^{5\nu}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j}t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j}t^{j+5\nu}$$
$$= \sum_{k=5\nu}^{\infty}\binom{\nu+k-5\nu-1}{k-5\nu}t^k$$

Άρα

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad k<5\nu \\ \binom{\nu+k-5\nu-1}{\nu-1}, & \text{αν} \quad k\geq 5\nu. \end{cases}$$

(β) $B(t) = (t^1+t^3)^\nu = t^\nu(1+t^2)^\nu$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = t^\nu\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j}t^{2j} = \sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j}t^{\nu+2j}$$

Άρα

$$b_k = \begin{cases} \binom{\nu}{(k-\nu)/2}, & \text{αν} \quad k=\nu, \nu+2, \nu+4, \dots, \nu+2\nu \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: (α) Οι λύσεις που παρατίθενται εδώ είναι συνοπτικές και απαιτείται μεγαλύτερος βαθμός επεξήγησης-λεπτομέρειας στα γραπτά των εξεταζόμενων. (β) Υπάρχουν, φυσικά, εναλλακτικές λύσεις εξίσου αποδεκτές.

Λύσεις Θεμάτων Ομάδας Β Συνδυαστική Ι, Φεβ. 2010

Θέμα 1:

(α) 2^{30}.

(β) $\binom{30}{15}\binom{30}{0}=\binom{30}{15}$.

(γ) $\sum_{k=0}^{15}\binom{30}{k}$, το οποίο μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής:

$$\sum_{k=0}^{30}\binom{30}{k}=2^{30}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{15}\binom{30}{k}+\sum_{k=16}^{30}\binom{30}{k}=2^{30}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{15}\binom{30}{k}+\sum_{k=16}^{30}\binom{30}{30-k}=2^{30}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{15}\binom{30}{k}+\sum_{j=0}^{14}\binom{30}{j}=2^{30}$$
$$\Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{15}\binom{30}{k}=2^{30}+\binom{30}{15}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{15}\binom{30}{k}=\frac{1}{2}\left(2^{30}+\binom{30}{15}\right).$$

(δ) $\binom{30}{15}2^{30}$.

Θέμα 2:

(α)
$$\sum_{s=0}^{v}(s^2+2s+1)\binom{v}{s}3^s=\sum_{s=0}^{v}\left(s(s-1)+3s+1\right)\binom{v}{s}3^s$$
$$=\sum_{s=2}^{v}s(s-1)\binom{v}{s}3^s+3\sum_{s=1}^{v}s\binom{v}{s}3^s+\sum_{s=0}^{v}\binom{v}{s}3^s$$
$$=9v(v-1)\sum_{s=2}^{v}\binom{v-2}{s-2}3^{s-2}+9v\sum_{s=1}^{v}\binom{v-1}{s-1}3^{s-1}+\sum_{s=0}^{v}\binom{v}{s}3^s$$
$$=9v(v-1)4^{v-2}+9v4^{v-1}+4^v.$$

(β)
$$\sum_{s=0}^{v}s\binom{v}{s}^2=\sum_{s=1}^{v}s\binom{v}{s}\binom{v}{v-s}=v\sum_{s=1}^{v}\binom{v-1}{s-1}\binom{v}{v-s}=v\sum_{j=0}^{v-1}\binom{v-1}{j}\binom{v}{v-1-j}$$
$$=v\binom{2v-1}{v-1}.$$

Θέμα 3:

Κάθε τρόπος αποβίβασης παριστάνεται από μια διατεταγμένη 50-άδα που τα στοιχεία της παίρνουν τιμές από 1 έως 10. Το i-οστό στοιχείο της δείχνει τον όροφο αποβίβασης για το άτομο i.

(α) Θα πρέπει να αποβιβαστούν 5 άτομα σε κάθε όροφο. Επομένως, Ζητάμε το πλήθος των διατεταγμένων 50-άδων με 5 "1", 5 "2", ..., 5 "10". Είναι μεταθέσεις 10 ειδών στοιχείων που το καθένα εμφανίζεται 5 φορές, των οποίων το πλήθος είναι $\frac{50!}{(5!)^{10}}$.

(β) Ω: Σύνολο τρόπων αποβίβασης

A_i: Σύνολο τρόπων αποβίβασης που κανένα άτομο δεν αποβιβάζεται στον όροφο i, $i=8,9,10$.

Ζητάμε το $N(A_8' A_9' A_{10}')$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

$$N(A_8' A_9' A_{10}') = N(\Omega) - N(A_8) - N(A_9) - N(A_{10}) + N(A_8 A_9) + N(A_8 A_{10}) + N(A_9 A_{10}) - N(A_8 A_9 A_{10})$$

$$= 10^{50} - 3\cdot 9^{50} + 3\cdot 8^{50} - 7^{50}$$

Θέμα 4:

(α) $A(t) = (t^2+t^4)^{\nu} = t^{2\nu}(1+t^2)^{\nu}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = t^{2\nu}\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j}t^{2j} = \sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j}t^{2\nu+2j}$$

Άρα

$$a_k = \begin{cases} \binom{\nu}{(k-2\nu)/2}, & \text{αν } k=2\nu, 2\nu+2, 2\nu+4, \dots, 2\nu+2\nu \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(β) $B(t) = (t^3+t^4+t^5+\cdots)^{\nu} = t^{3\nu}(1-t)^{-\nu}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = t^{3\nu}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j}t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j}t^{3\nu+j}$$

$$= \sum_{k=3\nu}^{\infty}\binom{\nu+k-3\nu+1}{k-3\nu}t^k$$

Άρα

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{αν } k<3\nu \\ \binom{\nu+k-3\nu+1}{\nu-1}, & \text{αν } k\geq 3\nu. \end{cases}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: (α) Οι λύσεις που παρατίθενται εδώ είναι συνοπτικές και απαιτείται μεγαλύτερος βαθμός επεξήγησης-λεπτομέρειας στα γραπτά των εξεταζόμενων. (β) Υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις εξίσου αποδεκτές.