ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. Θεωρούμε 100 (διακεκριμένα) αγόρια και 40 (διακεκριμένα) κορίτσια.

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 140 ατόμων σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν κορίτσια που να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις;

(β) (1.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 140 ατόμων σε σειρά ώστε όλα τα κορίτσια να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις (δηλαδή να μην παρεμβάλλεται αγόρι μεταξύ κοριτσιών);

(γ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 140 ατόμων σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν αγόρια στις τελευταίες 10 θέσεις;

(δ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 140 ατόμων σε σειρά που ξεκινούν με 70 συνεχόμενα αγόρια, μετά έχουν 40 συνεχόμενα κορίτσια και τελειώνουν με 30 συνεχόμενα αγόρια;

Θέμα 2. Να βρεθεί πόσες είναι οι διαφορετικές κατανομές 30 ομοίων σφαιριδίων σε 10 διακεκριμένα κελιά στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) (1.0 βαθμ.) Αν το πρώτο κελί είναι χωρητικότητας 5 σφαιριδίων και τα υπόλοιπα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας.

(β) (1.5 βαθμ.) Αν όλα τα κελιά είναι χωρητικότητας 5 σφαιριδίων.

Θέμα 3. (α) (1.2 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\substack{\kappa=0, \\ \kappa \ \alpha\rho\tau\iota o\varsigma}}^{\nu} (\kappa+1)\binom{\nu}{\kappa}2^{\kappa}.$$

(β) (1.3 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=\nu}^{\infty}\binom{\kappa}{\nu}2^{\nu-\kappa}.$$

Θέμα 4. (α) (1.3 βαθμ.) Έστω α_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$ το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ μπορούν να εμφανίζονται οσεσδήποτε φορές (χωρίς περιορισμό), ενώ τα στοιχεία $\omega_{\nu+1}$ και $\omega_{\nu+2}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται 0 ή 2 φορές το καθένα. Να βρεθεί η (εκθετική) γεννήτρια διατάξεων $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa \frac{t^\kappa}{k!}$ και να υπολογιστεί το α_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$.

(β) (1.2 βαθμ.) Έστω β_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ μπορούν να εμφανίζονται οσεσδήποτε φορές (χωρίς περιορισμό), ενώ το στοιχείο $\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ 2 φορές. Να βρεθεί η γεννήτρια συνδυασμών $B(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa t^\kappa$ και να υπολογιστεί το β_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Συνδυαστική Ι, Σεπτέμβριος 2010, Ομάδα Α — Λύσεις:

Θέμα 1.

(α) Μια τοποθέτηση των 140 ατόμων (100 αγ + 40 κορ) σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν κορίτσια σε διαδοχικές θέσεις δημιουργείται σε 3 στάδια:

1ο στάδιο: Τοποθέτηση των 100 αγοριών σε σειρά → 100! τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή θέσεων μεταξύ, πριν ή μετά τα αγόρια ώστε να τοποθετηθούν τα κορίτσια → $\binom{101}{40}$ τρόποι

3ο στάδιο: Τοποθέτηση των κοριτσιών στις θέσεις → 40! τρόποι

Από πολ/κή αρχή έχουμε $100!\binom{101}{40}40! = \frac{100!\,101!}{61!}$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

(β) Μια τοποθέτηση των 140 ατόμων (100 αγ + 40 κορ) σε σειρά ώστε όλα τα κορίτσια να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις δημιουργείται σε 3 στάδια:

1ο στάδιο: Τοποθέτηση των 100 αγοριών σε σειρά → 100! τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή "κενού" μεταξύ, πριν ή μετά τα αγόρια ώστε να τοποθετηθούν όλα τα κορίτσια → 101 τρόποι

3ο στάδιο: Τοποθέτηση των κοριτσιών σε σειρά → 40! τρόποι

Από πολ/κή αρχή έχουμε $100!\,101\cdot 40! = 101!\,40!$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

(γ) Μια τοποθέτηση των 140 ατόμων (100 αγ + 40 κορ) σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν αγόρια στις τελευταίες 10 θέσεις δημιουργείται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή και τοποθέτηση 10 κοριτσιών στις τελευταίες 10 θέσεις → $\frac{40!}{30!}$ τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων 130 ατόμων σε σειρά στις πρώτες 130 θέσεις → 130! τρόποι

Από πολ/κή αρχή έχουμε $\frac{40!}{30!}\cdot 130!$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

δ) Μια τοποθέτηση των 140 ατόμων (100 αγ + 40 κορ) σε σειρά με 70 αγόρια στην αρχή, 40 κορίτσια στη συνέχεια και 30 αγόρια στο τέλος δημιουργείται σε 2 στάδια

1ο στάδιο: Τοποθέτηση των 100 αγοριών στις θέσεις 1-70 και 111-140 → 100! τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθέτηση των 40 κοριτσιών στις 71-110 → 40! τρόποι

Από πολ/κή αρχή έχουμε 100! 40! διαφορετικές τοποθετήσεις

Θέμα 2

(α) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τον προσδιορισμό του πλήθους των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 30 \qquad (*)$$
$$0 \le x_1 \le 5$$
$$x_2, x_3, \dots, x_{10} \ge 0.$$

Έστω

Ω: Σύνολο λύσεων της $(*)$ με $x_1, x_2, \dots, x_{10} \ge 0$

A: Σύνολο λύσεων της $(*)$ με $x_1 \ge 6$ & $x_2, x_3, \dots, x_{10} \ge 0$

Είναι

$$N(\Omega) = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \binom{10+30-1}{30} = \binom{39}{30}.$$

Για το A έχουμε

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 30, \quad x_1 \ge 6 \ \& \ x_2, x_3, \dots, x_{10} \ge 0$$
$$\Updownarrow \quad y_1 = x_1 - 6 \ \& \ y_i = x_i, \ i = 2, 3, \dots, 10$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_{10} = 24, \quad y_1, y_2, \dots, y_{10} \ge 0$$

οπότε

$$N(A) = \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix} = \binom{10+24-1}{24} = \binom{33}{24}$$

Επομένως το ζητούμενο πλήθος είναι

$$N(A^c) = N(\Omega) - N(A) = \binom{39}{30} - \binom{33}{24}.$$

(β) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τον προσδιορισμό του πλήθους των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 30 \qquad (*)$$
$$0 \le x_1, x_2, \dots, x_{10} \le 5.$$

Έστω

Ω: Σύνολο ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $(*)$

A_i: Σύνολο ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $(*)$ με $x_i \ge 6$, $i = 1, 2, \dots, 10$.

Το ζητούμενο πλήθος είναι $N(A_1^c A_2^c \cdots A_{10}^c)$ που από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού είναι

$$\sum_{r=0}^{10} (-1)^r S_{10,r} \underset{\uparrow}{=} \sum_{r=0}^{10} (-1)^r \binom{10}{r} N(A_1 A_2 \cdots A_r)$$

$A_1, A_2, \dots, A_{10}$ ανταλλάξιμα λόγω της συμμετρίας των περιορ.

Όμως με την ίδια λογική που υπολογίσαμε το N(A) στο (α) είναι

$$N(A_1 A_2 \cdots A_r) = \begin{bmatrix} 10 \\ 30-6r \end{bmatrix} = \binom{10+30-6r-1}{30-6r} = \binom{39-6r}{30-6r}, \ r = 1, 2, \dots, 5,$$ ενώ $N(A_1 A_2 \cdots A_r) = 0$, $r = 6, 7, \dots, 10$. Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος είναι

$$N(A_1^c A_2^c \cdots A_{10}^c) = \sum_{r=0}^{5} (-1)^r \binom{10}{r} \binom{39-6r}{30-6r} = \sum_{r=0}^{5} (-1)^r \binom{10}{r} \binom{39-6r}{9}.$$

Θέμα 3.

(α) Έστω

$$S_a = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ άρτιος}}}^{\nu} (k+1)\binom{\nu}{k}2^k$$

$$S_\pi = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ περιττός}}}^{\nu} (k+1)\binom{\nu}{k}2^k$$

Τότε

$$S_a + S_\pi = \sum_{k=0}^{\nu}(k+1)\binom{\nu}{k}2^k$$

$$S_a - S_\pi = \sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k(k+1)\binom{\nu}{k}2^k = \sum_{k=0}^{\nu}(k+1)\binom{\nu}{k}(-2)^k.$$

Έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\nu}(k+1)\binom{\nu}{k}t^k = \sum_{k=\cancel{0}1}^{\nu} k\binom{\nu}{k}t^k + \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}t^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu}\cancel{k}\frac{\nu}{\cancel{k}}\binom{\nu-1}{k-1}t^k + \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}t^k$$

$$\overset{j=k-1}{=} \nu t\sum_{j=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{j}t^j + \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}t^k$$

Διώνυμο Νεύτωνα $\overset{}{=}$ $\nu t(1+t)^{\nu-1} + (1+t)^\nu$

Άρα $S_a + S_\pi = 2\nu 3^{\nu-1} + 3^\nu$

$$S_a - S_\pi = -2\nu(-1)^{\nu-1} + (-1)^\nu$$

οπότε $S_a = \dfrac{2\nu 3^{\nu-1} + 3^\nu - 2\nu(-1)^{\nu-1} + (-1)^\nu}{2} = \dfrac{(2\nu+3)3^{\nu-1} - (2\nu+1)(-1)^{\nu-1}}{2}$

(β) $$\sum_{k=\nu}^{\infty}\binom{k}{\nu}2^{\nu-k} \overset{j=k-\nu}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j}{\nu}2^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j}{j}2^{-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+1+j-1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\left[{\nu+1 \atop j}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

$$(1-t)^{-\nu} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[{\nu \atop j}\right]t^j \qquad = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-(\nu+1)} = 2^{\nu+1}.$$

$|t|<1$

Θέμα 4.

(α). Η (εκθετική) απαριθμήτρια του ω_j είναι

$$E_j(t,x_j) = \sum_{z=0}^{\infty} (tx_j)^z/z! = e^{tx_j}, \quad j=1,2,\dots,\nu$$

$$E_j(t,x_j) = (tx_j)^0/0! + (tx_j)^2/2! = 1+\frac{(tx_j)^2}{2}, \quad j=\nu+1,\nu+2$$

οπότε

$$E_j(t) = e^t, \quad j=1,2,\dots,\nu$$
$$E_j(t) = 1+\frac{t^2}{2}, \quad j=\nu+1,\nu+2.$$

Άρα η (εκθετική) γεννήτρια διατάξεων είναι

$$E(t) = E_1(t)E_2(t)\cdots E_{\nu+2}(t) = e^{\nu t}\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^2$$

οπότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \nu^j \frac{t^j}{j!}\cdot\left(1+\cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}}+\frac{t^4}{4}\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \nu^j \frac{t^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \nu^j \frac{t^{j+2}}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nu^j}{4}\cdot\frac{t^{j+4}}{j!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} \nu^{k-2}\frac{t^k}{(k-2)!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\nu^{k-4}}{4}\frac{t^k}{(k-4)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\nu^{k-2}\frac{t^k}{k!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{4}k(k-1)(k-2)(k-3)\nu^{k-4}\frac{t^k}{k!}$$

Άρα

$$a_k = \begin{cases} \nu^k, & k=0,1 \\ \nu^k + k(k-1)\nu^{k-2}, & k=2,3 \\ \nu^k + k(k-1)\nu^{k-2} + \frac{1}{4}k(k-1)(k-2)(k-3)\nu^{k-4}, & k=4,5,\dots \end{cases}$$

(β) Η απαριθμήτρια του ω_j είναι

$$A_j(t,x_j) = \sum_{z=0}^{\infty} (tx_j)^z = \frac{1}{1-tx_j}, \quad j=1,2,\dots,\nu$$

$$A_{\nu+1}(t,x_j) = (tx_j)^0 + (tx_j)^1 + (tx_j)^2$$

οπότε

$$A_j(t) = (1-t)^{-1}, \quad j=1,2,\dots,\nu$$
$$A_{\nu+1}(t) = 1+t+t^2.$$

Άρα η γεννήτρια συνδυασμών είναι

$$B(t) = (1-t)^{-\nu}(1+t+t^2)$$

οπότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = (1-t)^{-\nu}(1+t+t^2)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j} t^j \cdot (1+t+t^2)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j} t^j + \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j} t^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j} t^{j+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu+k-1}{k} t^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\nu+k-2}{k-1} t^k + \sum_{k=2}^{\infty}\binom{\nu+k-3}{k-2} t^k$$

Άρα

$$b_k = \begin{cases} \binom{\nu-1}{0} = 1, & k=0 \\ \binom{\nu}{1}+\binom{\nu-1}{0} = \nu+1, & k=1 \\ \binom{\nu+k-1}{k}+\binom{\nu+k-2}{k-1}+\binom{\nu+k-3}{k-2}, & k=2,3,\dots \end{cases}$$