ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε 20 (διακεκριμένα) κορίτσια και 80 (διακεκριμένα) αγόρια.

(α) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 100 ατόμων σε σειρά που ξεκινούν με 30 συνεχόμενα αγόρια, μετά έχουν 20 συνεχόμενα κορίτσια και τελειώνουν με 50 συνεχόμενα αγόρια;

(β) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 100 ατόμων σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν κορίτσια που να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις;

(γ) (1.0 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 100 ατόμων σε σειρά ώστε όλα τα κορίτσια να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις (δηλαδή να μην παρεμβάλλεται αγόρι μεταξύ κοριτσιών);

(δ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις αυτών των 100 ατόμων σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν αγόρια στις τελευταίες 5 θέσεις;

Θέμα 2. Να βρεθεί πόσες είναι οι διαφορετικές κατανομές 45 ομοίων σφαιριδίων σε 15 διακεκριμένα κελιά στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) (1.5 βαθμ.) Αν όλα τα κελιά είναι χωρητικότητας 10 σφαιριδίων.

(β) (1.0 βαθμ.) Αν το πρώτο κελί είναι χωρητικότητας 10 σφαιριδίων και τα υπόλοιπα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας.

Θέμα 3. (α) (1.3 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{j=m}^{\infty} \binom{j}{m} 3^{m-j}.$$

(β) (1.2 βαθμ.) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\substack{j=0,\\ j \text{ περριτος}}}^{m} (2j+1)\binom{m}{j}3^{j}.$$

Θέμα 4. (α) (1.2 βαθμ.) Έστω α_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ μπορούν να εμφανίζονται οσεσδήποτε φορές (χωρίς περιορισμό), ενώ το στοιχείο $\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ 1 φορά. Να βρεθεί η γεννήτρια συνδυασμών $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa t^\kappa$ και να υπολογιστεί το α_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$.

(β) (1.3 βαθμ.) Έστω β_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$ το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ μπορούν να εμφανίζονται οσεσδήποτε φορές (χωρίς περιορισμό), ενώ τα στοιχεία $\omega_{\nu+1}$ και $\omega_{\nu+2}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται 0 ή 3 φορές το καθένα. Να βρεθεί η (εκθετική) γεννήτρια διατάξεων $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa \frac{t^\kappa}{k!}$ και να υπολογιστεί το β_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Συνδυαστική Ι, Σεπτέμβριος 2010 – Ομάδα Β – Λύσεις:

Θέμα 1.

(α) Μια τοποθέτηση των 100 ατόμων (20 κορ + 80 αγορ) σε σειρά με 30 αγόρια στην αρχή, 20 κορίτσια στη συνέχεια και 50 αγόρια στο τέλος γίνεται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Τοποθέτηση των 80 αγοριών στις θέσεις 1–30 και 51–100 → $80!$ τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθέτηση των 20 κοριτσιών στις θέσεις 31–50 → $20!$ τρόποι

Από πολ/κή αρχή έχουμε $80!\cdot 20!$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

(β) Μια τοποθέτηση των 100 ατόμων (20 κορ + 80 αγορ) σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν κορίτσια σε διαδοχικές θέσεις, δημιουργείται σε 3 στάδια:

1ο στάδιο: Τοποθέτηση των 80 αγοριών σε σειρά → $80!$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή θέσεων μεταξύ, πριν ή μετά τα αγόρια ώστε να τοποθετηθούν τα κορίτσια → $\binom{81}{20}$ τρόποι

3ο στάδιο: Τοποθέτηση των 20 κοριτσιών στις θέσεις → $20!$ τρόποι

Από πολ/κή αρχή έχουμε $80!\binom{81}{20}20! = \frac{80!\,81!}{61!}$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

(γ) Μια τοποθέτηση των 100 ατόμων (20 κορ + 80 αγορ) σε σειρά ώστε όλα τα κορίτσια να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις γίνεται σε 3 στάδια:

1ο στάδιο: Τοποθέτηση των 80 αγοριών σε σειρά → $80!$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή "κενού" μεταξύ, πριν ή μετά τα αγόρια για να τοποθετηθούν όλα τα κορίτσια → 81 τρόποι

3ο στάδιο: Τοποθέτηση των 20 κοριτσιών σε σειρά → $20!$ τρόποι

Από πολ/κή αρχή έχουμε $80!\cdot 81\cdot 20! = 81!\cdot 20!$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

(δ) Μια τοποθέτηση των 100 ατόμων (20 κορ + 80 αγορ) σε σειρά ώστε να μην υπάρχουν αγόρια στις τελευταίες 5 θέσεις γίνεται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή και τοποθέτηση στη σειρά 5 κοριτσιών για τις τελευταίες 5 θέσεις → $\frac{20!}{15!}$ τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων 95 ατόμων σε σειρά στις πρώτες 95 θέσεις → $95!$ τρόποι

Από πολ/κή αρχή έχουμε $\frac{20!}{15!}\cdot 95!$ διαφορετικές τοποθετήσεις

Θέμα 2.

(a) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τον προσδιορισμό του πλήθους των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{15} = 45 \quad (*)$$

$$0 \le x_1, x_2, \ldots, x_{15} \le 10$$

Έστω

Ω : Σύνολο ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της (*)

A_i : Σύνολο ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της (*) με $x_i \geq 11$, $i = 1, 2, \ldots, 15$.

Το ζητούμενο πλήθος είναι το $N(A_1^c A_2^c \cdots A_{15}^c)$ που από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού δίνεται ως

$$\sum_{r=0}^{15} (-1)^r S_{15,r} \underset{\uparrow}{=} \sum_{r=0}^{15} (-1)^r \binom{15}{r} N(A_1 A_2 \cdots A_r)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_{15}$ ανταλλάξιμα λόγω της συμμετρίας των περιορ

Όμως

$N(A_1 A_2 \cdots A_r) = \#$ ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της (*) με

$x_1, x_2, \ldots, x_r \geq 11$ και $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{15} \geq 0$

$y_i = x_i - 11$, $i = 1,2,\ldots,r$; $y_i = x_i$, $i = r+1,\ldots,15$

$= \#$ ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της

$y_1 + 11 + y_2 + 11 + \cdots + y_r + 11 + y_{r+1} + y_{r+2} + \cdots + y_{15} = 45$ με $y_i \geq 0$

$= \#$ ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της

$y_1 + y_2 + \cdots + y_{15} = 45 - 11r$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} 15 \\ 45-11r \end{bmatrix} = \binom{15+45-11r-1}{45-11r} = \binom{59-11r}{45-11r}, & r = 1,2,3,4 \\ 0, & r = 5,6,\ldots,15 \end{cases}$$

Επομένως το ζητούμενο πλήθος είναι

$$N(A_1^c A_2^c \cdots A_{15}^c) = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r \binom{15}{r} \binom{59-11r}{45-11r} = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r \binom{15}{r} \binom{59-11r}{14}.$$

(β) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τον προσδιορισμό του πλήθους των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{15} = 45 \quad (**)$$

$$0 \le x_1 \le 10$$

$$x_2, x_3, \ldots, x_{15} \geq 0$$

Ω = Σύνολο μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων της (**) $\Rightarrow N(\Omega) = \begin{bmatrix} 15 \\ 45 \end{bmatrix} = \binom{59}{45}$

A = Σύνολο μη-αρνητικών ακέρ. λύσεων της (**) με $x_1 \geq 11 \overset{y_1 = x_1 - 11}{\Longrightarrow} N(A) = \begin{bmatrix} 15 \\ 34 \end{bmatrix} = \binom{48}{34}$

Το ζητούμενο πλήθος είναι $N(A^c) = N(\Omega) - N(A) = \binom{59}{45} - \binom{48}{34}$

Θέμα 3.

(α) $$\sum_{j=m}^{\infty}\binom{j}{m}3^{m-j} \overset{k=j-m}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+m}{m}3^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k}{k}3^{-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{(m+1)+k-1}{k}3^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[{m+1 \atop k}\right]\left(\frac{1}{3}\right)^k$$
$$(1-t)^{-\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[{\nu \atop k}\right]t^k, \quad |t|<1 \qquad = \left(1-\frac{1}{3}\right)^{-(m+1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{m+1}$$

(β) Έστω
$$S_a = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ άρτιος}}}^{m}(2j+1)\binom{m}{j}3^j, \qquad S_n = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ περιττός}}}^{m}(2j+1)\binom{m}{j}3^j$$
Τότε
$$S_a+S_n = \sum_{j=0}^{m}(2j+1)\binom{m}{j}3^j, \qquad S_a-S_n = \sum_{j=0}^{m}(2j+1)\binom{m}{j}(-3)^j.$$
Έχουμε
$$\sum_{j=0}^{m}(2j+1)\binom{m}{j}t^j = 2\sum_{j=0}^{m} j\binom{m}{j}t^j + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}t^j$$
$$= 2\sum_{j=1}^{m}\cancel{j}\,\frac{m}{\cancel{j}}\binom{m-1}{j-1}t^j + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}t^j$$
$$\overset{k=j-1}{=} 2mt\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}t^k + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}t^j$$
$$= 2mt(1+t)^{m-1} + (1+t)^m$$

Άρα
$$S_a+S_n = 6m\,4^{m-1}+4^m$$
$$S_a-S_n = -6m(-2)^{m-1}+(-2)^m$$

Οπότε
$$S_n = \frac{6m\,4^{m-1}+4^m+6m(-2)^{m-1}-(-2)^m}{2}.$$
$$= \frac{(6m+4)\,4^{m-1}+(6m+2)(-2)^{m-1}}{2}$$

Θεμα 4.

(α) Η απαριθμήτρια του ω_j είναι

$$A_j(t,x_j) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (tx_j)^\ell = \frac{1}{1-tx_j}, \quad j=1,2,\dots,\nu$$

$$A_j(t,x_j) = \sum_{\ell=0}^{1} (tx_j)^\ell = 1+tx_j, \quad j=\nu+1,$$

οπότε

$$A_j(t) = (1-t)^{-1}, \quad j=1,2,\dots,\nu$$

$$A_j(t) = 1+t, \quad j=\nu+1.$$

Άρα η γεννήτρια συνδυασμών είναι

$$A(t) = A_1(t)\cdots A_{\nu+1}(t) = (1-t)^{-\nu}(1+t)$$

Αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του t και έχουμε

$$A(t) = (1-t)^{-\nu}(1+t) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j} t^j\cdot(1+t)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j} t^j + \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\nu+j-1}{j} t^{j+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu+k-1}{k} t^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\nu+k-2}{k-1} t^k$$

οπότε

$$a_k = \begin{cases} \binom{\nu+0-1}{0} = 1, & k=0 \\ \binom{\nu+k-1}{k} + \binom{\nu+k-2}{k}, & k=1,2,\dots \end{cases}$$

(β) Η (εκθετική) απαριθμήτρια του ω_j είναι

$$E_j(t,x_j) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (tx_j)^\ell/\ell!, \quad j=1,2,\dots,\nu$$

$$E_j(t,x_j) = (tx_j)^0/0! + (tx_j)^3/3!, \quad j=\nu+1,\nu+2,$$

οπότε

$$E_j(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell/\ell! = e^t, \quad j=1,2,\dots,\nu$$

$$E_j(t) = 1+t^3/6; \quad j=\nu+1,\nu+2.$$

Άρα η (εκθετική) γεννήτρια διατάξεων είναι

$$E(t) = E_1(t)\cdots E_{\nu+2}(t) = e^{\nu t}(1+t^3/6)^2 = e^{\nu t}(1+t^3/3+t^6/36)$$

Αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του t και έχουμε

$$E(t) = e^{\nu t}\left(1+\frac{t^3}{3}+\frac{t^6}{36}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\nu^j\frac{t^j}{j!}\left(1+\frac{t^3}{3}+\frac{t^6}{36}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\nu^j\frac{t^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty}\nu^j\frac{t^{j+3}}{3j!} + \sum_{j=0}^{\infty}\nu^j\frac{t^{j+6}}{36j!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\nu^k}{k!}t^k + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{\nu^{k-3}}{3(k-3)!}t^k + \sum_{k=6}^{\infty}\frac{\nu^{k-6}}{36(k-6)!}t^k \Rightarrow$$

$$b_k = \begin{cases} \nu^k & k=0,1,2 \\ \nu^k+\frac{1}{3}\nu^{k-3}k(k-1)(k-2), & k=3,4,5 \\ \nu^k+\frac{1}{3}\nu^{k-3}k(k-1)(k-2)+\frac{1}{36}\nu^{k-6}k(k-1)\cdots(k-5), & k=6,7,\dots \end{cases}$$