ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο των κεφαλαίων γραμμάτων του Ελληνικού Αλφάβητου που περιέχει 24 γράμματα, από τα οποία 7 είναι φωνήεντα (Α,Ε,Η,Ι,Ο,Υ,Ω) και τα υπόλοιπα 17 είναι σύμφωνα. Ως λέξη ορίζουμε μια επαναληπτική διάταξη στοιχείων του συνόλου αυτού (δεν είναι απαραίτητο να έχει νόημα).
(α) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 10 γράμματα, που αρχίζουν με Α, τελειώνουν με Ε και δεν περιέχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα (δηλαδή κάθε γράμμα της λέξης εμφανίζεται μόνο μια φορά);
(β) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 10 γράμματα στις οποίες τα πρώτα 6 γράμματα είναι φωνήεντα και τα τελευταία 4 γράμματα είναι σύμφωνα;
(γ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 10 γράμματα που περιέχουν όλα τα φωνήεντα και δεν περιέχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα;
(δ) (1.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 10 γράμματα στις οποίες το γράμμα Α μπορεί να εμφανίζεται το πολύ 5 φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά;

Θέμα 2. (α) (1.5 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu \leq 3 \cdot 2^\nu + 2$$

με τους περιορισμούς $x_i \geq 3 \cdot \binom{\nu}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.
(β) (1.5 βαθμ.) Δίνεται $\nu \geq 1$ ακέραιος. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} \left(\nu\kappa + \binom{\nu}{\kappa} \right).$$

Θέμα 3. (α) (1.5 βαθμ.)Να βρείτε με πόσους τρόπους είναι δυνατό να μοιραστούν 1000 όμοιες καραμέλες σε 100 (διακεκριμένα) παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει το πολύ 300 καραμέλες.
(β) (1.5 βαθμ.) Να βρείτε με πόσους τρόπους είναι δυνατό να μοιραστούν 1000 όμοιες καραμέλες σε 100 (διακεκριμένα) παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 5 καραμέλες και το πολύ 505.

Θέμα 4. (α) (1.5 βαθμ.) Έστω α_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$ το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ μπορούν να εμφανίζονται οποιονδήποτε αριθμό φορών (χωρίς περιορισμό), ενώ τα στοιχεία $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται τουλάχιστον 1 φορά το καθένα. Να βρεθεί η (εκθετική) γεννήτρια διατάξεων $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa \frac{t^\kappa}{\kappa!}$ και να υπολογιστεί το α_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$.
(β) (1.5 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των συνδυασμών 3 ανά 100 με επανάληψη του συνόλου $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, όπου το στοιχείο ω_1 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ μια φορά, το στοιχείο ω_2 επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών (0 ή 2 ή 4 ή …) και το στοιχείο ω_3 επιτρέπεται να εμφανίζεται οποιονδήποτε αριθμό φορών (χωρίς περιορισμό).

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1. (α) Αφού ενδιαφερόμαστε για λέξεις με 10 γράμματα που αρχίζουν με Α και τελειώνουν με Ε, θα πρέπει από τα 22 γράμματα (εκτός του Α και του Ε που έχουν ήδη επιλεγεί) να επιλέξουμε 8 και να τα διατάξουμε ώστε να καλυφθούν τα ενδιάμεσα γράμματα. Αφού δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα θα έχουμε (απλές) διατάξεις 22 ανά 8, δηλαδή $(22)_8 = \frac{22!}{(22-8)!} = \frac{22!}{14!}$ τέτοιες λέξεις.

(β) Έχουμε διατάξεις 7 ανά 6 με επανάληψη για τα πρώτα 6 γράμματα που πρέπει να επιλεγούν από τα 7 φωνήεντα και διατάξεις 17 ανά 4 με επανάληψη για τα τελευταία 4 γράμματα που πρέπει να επιλεγούν από τα 17 σύμφωνα. Από πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά $7^6 \cdot 17^4$ τέτοιες λέξεις.

(γ) Η κατασκευή μιας λέξης με 10 γράμματα που περιέχει όλα τα φωνήεντα και δεν περιέχει επαναλαμβανόμενα γράμματα μπορεί να γίνει σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε ποια θα είναι τα σύμφωνα που θα εμφανιστούν στη λέξη με $\binom{17}{3}$ τρόπους. Στο δεύτερο στάδιο διατάσουμε όλα τα γράμματα της λέξης (7 φωνήεντα και τα 3 επιλεχθέντα σύμφωνα) με 10! τρόπους. Από πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{17}{3} \cdot 10! = \frac{17!10!}{3!14!}$ τέτοιες λέξεις.

Εναλλακτικά μπορούμε να σκεφτούμε ότι επιλέγουμε με τη σειρά 7 θέσεις από τις 10, χωρίς επανάληψη, για να βάλουμε τα φωνήεντα και κατόπιν από τα 17 σύμφωνα επιλέγουμε με τη σειρά 3, χωρίς επανάληψη για να τα βάλουμε στις θέσεις που είναι ακόμα κενές. Από πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν συνολικά $(10)_7(17)_3 = \frac{10!17!}{3!14!}$ τέτοιες λέξεις.

(δ) Βρίσκουμε πρώτα πόσες είναι οι λέξεις με 10 γράμματα στις οποίες το γράμμα Α μπορεί να εμφανίζεται ακριβώς j φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά. Η κατασκευή μιας τέτοιας λέξης μπορεί να γίνει σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε j από τις 10 θέσεις της λέξης για να μπούν τα Α με $\binom{10}{j}$ τρόπους. Στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε μια διάταξη 23 ανά $10-j$ για να συμπληρωθούν οι υπόλοιπες θέσεις. Συνεπώς έχουμε από πολλαπλασιαστική αρχή συνολικά $\binom{10}{j} \cdot (23)_{10-j} = \frac{10!23!}{j!(10-j)!(13+j)!}$ λέξεις με 10 γράμματα στις οποίες το γράμμα Α μπορεί να εμφανίζεται ακριβώς j φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά. Χρησιμοποιώντας την αρχή του αθροίσματος συμπεραίνουμε ότι οι λέξεις με 10 γράμματα στις οποίες το γράμμα Α μπορεί να εμφανίζεται το πολύ 5 φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά είναι $\sum_{j=0}^{5} \binom{10}{j} \cdot (23)_{10-j} = \sum_{j=0}^{5} \frac{10!23!}{j!(10-j)!(13+j)!}$.

Εναλλακτικά, για να δημιουργήσουμε μια λέξη με 10 γράμματα στις οποίες το γράμμα Α μπορεί να εμφανίζεται ακριβώς j φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά, δουλεύουμε σε 2 στάδια. Στο πρώτο επιλέγουμε $10-j$ γράμματα από τα 23 (εκτός του Α) για να μπούν στη λέξη, με $\binom{23}{10-j}$ τρόπους. Στο δεύτερο στάδιο βάζουμε τα j αντίγραφα του A και τα μεμονωμένα $10-j$ γράμματα στη σειρά (μεταθέσεις $10-j+1$ ειδών στοιχείων που το ένα στοιχείο, το Α, εμφανίζεται j φορές ενώ τα υπόλοιπα $10-j$ στοιχεία από μια φορά το καθένα) με $\frac{10!}{j!(1!)^{10-j}} = \frac{10!}{j!}$ τρόπους. Συνεπώς έχουμε από πολλαπλασιαστική αρχή συνολικά $\binom{23}{10-j}\frac{10!}{j!} = \frac{23!10!}{(10-j)!(13+j)!j!}$ στις οποίες το γράμμα Α μπορεί να εμφανίζεται ακριβώς j φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά και μετά εφαρμόζουμε την αρχή του αθροίσματος όπως παραπάνω.

Θέμα 2. (α) Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $y_i = x_i - 3 \cdot \binom{\nu}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu \leq 3 \cdot 2^\nu + 2 - 3 \sum_{i=1}^{\nu} \binom{\nu}{i}$. Χρησιμοποιώντας το διώνυμο του Newton έχουμε $\sum_{i=1}^{\nu} \binom{\nu}{i} = 2^\nu - 1$. Επομένως το πρόβλημα έχει αναχθεί στην εύρεση του πλήθους των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της ανίσωσης $y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu \leq 5$. Αλλά αυτό ισούται με το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu + y_{\nu+1} = 5$ που ταυτίζεται με το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών $\nu + 1$ ανά 5, δηλαδή είναι $\left[{\nu+1 \atop 5}\right] = \binom{\nu+1+5-1}{5} = \binom{\nu+5}{5} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+5)}{120}$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} \left(\nu\kappa + \binom{\nu}{\kappa} \right) &= \nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa \binom{\nu}{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa}^2 \\ &= \nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa \frac{\nu}{\kappa} \binom{\nu-1}{\kappa-1} + \sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} \binom{\nu}{\nu-\kappa} \\ &= \nu^2 \sum_{j=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{j} + \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} \binom{\nu}{\nu-\kappa} - \binom{\nu}{0}\binom{\nu}{\nu} \\ &= \nu^2 2^{\nu-1} + \binom{2\nu}{\nu} - 1, \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu}{\kappa}\binom{\nu-1}{\kappa-1}$ και $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$ των διωνυμικών συντελεστών και στην τέταρτη την ταυτότητα του Cauchy.

Θέμα 3. (α) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση του πλήθους των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 1000$, υπό τους περιορισμούς $0 \leq x_i \leq 300$ για $i = 1, 2, \ldots, 100$. Θέτουμε Ω το σύνολο των ακέραιων μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης και A_i το σύνολο των ακέραιων μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης με $x_i \geq 301$ για $i = 1, 2, \ldots, 100$. Το ζητούμενο πλήθος είναι τότε το $N(A_1' A_2' \cdots A_{100}')$ που θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Έχουμε ότι $N(\Omega) = \left[{100 \atop 1000}\right]$, $N(A_i) = \left[{100 \atop 699}\right]$ (το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1 + y_2 + \cdots + y_{100} + 301 = 1000$), $i = 1, 2, \ldots, 100$, $N(A_i A_j) = \left[{100 \atop 398}\right]$ (το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1 + y_2 + \cdots + y_{100} + 2 \cdot 301 = 1000$), $i \neq j$, $N(A_i A_j A_k) = \left[{100 \atop 97}\right]$ (το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1 + y_2 + \cdots + y_{100} + 3 \cdot 301 = 1000$), $i \neq j \neq k \neq i$, ενώ οι τομές 4 ή παραπάνω διακεκριμένων συνόλων από τα $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ είναι κενά σύνολα. Καταλήγουμε στο ότι το ζητούμενο πλήθος είναι το $N(A_1' A_2' \cdots A_{100}') = \left[{100 \atop 1000}\right] - \binom{100}{1}\left[{100 \atop 699}\right] + \binom{100}{2}\left[{100 \atop 398}\right] - \binom{100}{3}\left[{100 \atop 97}\right]$.

(β) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση του πλήθους των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 1000$, υπό τους περιορισμούς $5 \leq x_i \leq 505$ για $i = 1, 2, \ldots, 100$. Με το μετασχηματισμό $y_i = x_i - 5$, $i = 1, 2, \ldots, 100$, το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό του πλήθους των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $y_1 + y_2 + \cdots + y_{100} = 500$, υπό τους περιορισμούς $0 \leq y_i \leq 500$ για $i = 1, 2, \ldots, 100$. Παρατηρούμε ότι οι δεξιοί περιορισμοί είναι περιττοί αφού η σχέση $y_1 + y_2 + \cdots + y_{100} = 500$ και οι περιορισμοί $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, 100$ συνεπάγονται ότι $y_i \leq 500$, $i = 1, 2, \ldots, 100$. Επομένως το ζητούμενο πλήθος ανάγεται στο πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1 + y_2 + \cdots + y_{100} = 500$

που είναι $\left[{100 \atop 500}\right] = \binom{599}{500}$.

Θέμα 4. (α) Η (εκθετική) γεννήτρια των διατάξεων είναι η $E(t) = (e^t)^\nu \cdot (e^t - 1)^2 = e^{(\nu+2)t} - 2e^{(\nu+1)t} + e^{\nu t}$. Κατόπιν χρησιμοποιούμε την εκθετική σειρά $e^t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}$ για να αναπτύξουμε την $E(t)$ σε δυνάμεις του t^k. Τελικά έχουμε $\alpha_\kappa = (\nu+2)^k - 2(\nu+1)^k + \nu^k$, $k = 0, 1, \ldots$.

(β) Η γεννήτρια των συνδυασμών 3 ανά k με επανάληψη του συνόλου $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, όπου το στοιχείο ω_1 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ μια φορά, το στοιχείο ω_2 επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών (0 ή 2 ή 4 ή ...) και το στοιχείο ω_3 επιτρέπεται να εμφανίζεται οποιονδήποτε αριθμό φορών (χωρίς περιορισμό) είναι η $A(t) = (1+t)(1+t^2+t^4+t^6+\cdots)(1+t+t^2+t^3+\cdots)$ που χρησιμοποιώντας το άπειρο άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου γράφεται στη μορφή $A(t) = (1+t)\frac{1}{1-t^2}\frac{1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2}$. Ο συντελεστής του t^κ στη σειρά είναι ο επαναληπτικός συνδυασμός 2 ανά κ, δηλαδή ο $\left[{2 \atop \kappa}\right] = \binom{2+\kappa-1}{\kappa} = \kappa + 1$. Συνεπώς για $\kappa = 100$ έχουμε 101 τέτοιους συνδυασμούς.