ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο των κεφαλαίων γραμμάτων του Ελληνικού Αλφάβητου που περιέχει 24 γράμματα, από τα οποία 7 είναι φωνήεντα (Α,Ε,Η,Ι,Ο,Υ,Ω) και τα υπόλοιπα 17 είναι σύμφωνα. Ως λέξη ορίζουμε μια επαναληπτική διάταξη στοιχείων του συνόλου αυτού (δεν είναι απαραίτητο να έχει νόημα).
(α) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 12 γράμματα στις οποίες τα πρώτα 5 γράμματα είναι σύμφωνα και τα τελευταία 7 γράμματα είναι φωνήεντα;
(β) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 12 γράμματα, που αρχίζουν με Η, τελειώνουν με Σ και δεν περιέχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα (δηλαδή κάθε γράμμα της λέξης εμφανίζεται μόνο μια φορά);
(γ) (1.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 12 γράμματα στις οποίες το γράμμα Ι μπορεί να εμφανίζεται το πολύ 4 φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά;
(δ) (0.5 βαθμ.) Πόσες είναι οι λέξεις με 12 γράμματα που περιέχουν όλα τα φωνήεντα και δεν περιέχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα;

Θέμα 2. (α) (1.5 βαθμ.) Δίνεται $\nu \geq 2$ ακέραιος. Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \left(\kappa + \nu\binom{\nu}{\kappa}\right)\binom{\nu}{\kappa}.$$

(β) (1.5 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu \leq 5 \cdot 2^\nu + 3$$

με τους περιορισμούς $x_i \geq 5 \cdot \binom{\nu}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Θέμα 3. (α) (1.5 βαθμ.) Να βρείτε με πόσους τρόπους είναι δυνατό να μοιραστούν 2000 όμοιες μπάλες σε 100 (διακεκρ.) παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 10 μπάλες και το πολύ 1010.
(β) (1.5 βαθμ.)Να βρείτε με πόσους τρόπους είναι δυνατό να μοιραστούν 2000 όμοιες μπάλες σε 100 (διακεκριμένα) παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει το πολύ 550 μπάλες.

Θέμα 4. (α) (1.5 βαθμ.) Να βρεθεί το πλήθος των συνδυασμών 4 ανά 100 με επανάληψη του συνόλου $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου τα στοιχεία ω_1, ω_2 επιτρέπεται να εμφανίζονται οποιονδήποτε αριθμό φορών (χωρίς περιορισμό) το καθένα, το στοιχείο ω_3 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ μια φορά και το στοιχείο ω_4 επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών (0 ή 2 ή 4 ή $\ldots$).
(β) (1.5 βαθμ.) Δίνεται $\nu \geq 3$ ακέραιος. Έστω α_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$ το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu-2}$ μπορούν να εμφανίζονται οποιονδήποτε αριθμό φορών (χωρίς περιορισμό), ενώ τα στοιχεία $\omega_{\nu-1}, \omega_\nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται τουλάχιστον 1 φορά το καθένα. Να βρεθεί η (εκθετική) γεννήτρια διατάξεων $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa \frac{t^\kappa}{\kappa!}$ και να υπολογιστεί το α_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1. (β) Έχουμε διατάξεις 17 ανά 5 με επανάληψη για τα πρώτα 5 γράμματα που πρέπει να επιλεγούν από τα 17 σύμφωνα και διατάξεις 7 ανά 7 με επανάληψη για τα τελευταία 7 γράμματα που πρέπει να επιλεγούν από τα 7 φωνήεντα. Από πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά $17^5 \cdot 7^7$ τέτοιες λέξεις.

(β) Αφού ενδιαφερόμαστε για λέξεις με 12 γράμματα που αρχίζουν με Η και τελειώνουν με Σ, θα πρέπει από τα 22 γράμματα (εκτός του Η και του Σ που έχουν ήδη επιλεγεί) να επιλέξουμε 10 και να τα διατάξουμε ώστε να καλυφθούν τα ενδιάμεσα γράμματα. Αφού δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενα γράμματα θα έχουμε (απλές) διατάξεις 22 ανά 10, δηλαδή $(22)_{10} = \frac{22!}{(22-10)!} = \frac{22!}{12!}$ τέτοιες λέξεις.

(γ) Βρίσκουμε πρώτα πόσες είναι οι λέξεις με 12 γράμματα στις οποίες το γράμμα Ι μπορεί να εμφανίζεται ακριβώς j φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά. Η κατασκευή μιας τέτοιας λέξης μπορεί να γίνει σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε j από τις 12 θέσεις της λέξης για να μπούν τα Ι με $\binom{12}{j}$ τρόπους. Στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε μια διάταξη 23 ανά $12-j$ για να συμπληρωθούν οι υπόλοιπες θέσεις. Συνεπώς έχουμε από πολλαπλασιαστική αρχή συνολικά $\binom{12}{j} \cdot (23)_{12-j} = \frac{12!23!}{j!(12-j)!(11+j)!}$ λέξεις με 12 γράμματα στις οποίες το γράμμα Ι μπορεί να εμφανίζεται ακριβώς j φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά. Χρησιμοποιώντας την αρχή του αθροίσματος συμπεραίνουμε ότι οι λέξεις με 12 γράμματα στις οποίες το γράμμα Ι μπορεί να εμφανίζεται το πολύ 4 φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά είναι $\sum_{j=0}^{4} \binom{12}{j} \cdot (23)_{12-j} = \sum_{j=0}^{4} \frac{12!23!}{j!(12-j)!(11+j)!}$.

Εναλλακτικά, για να δημιουργήσουμε μια λέξη με 12 γράμματα στις οποίες το γράμμα Ι μπορεί να εμφανίζεται ακριβώς j φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά, δουλεύουμε σε 2 στάδια. Στο πρώτο επιλέγουμε $12-j$ γράμματα από τα 23 (εκτός του Ι) για να μπούν στη λέξη, με $\binom{23}{12-j}$ τρόπους. Στο δεύτερο στάδιο βάζουμε τα j αντίγραφα του I και τα μεμονωμένα $12-j$ γράμματα στη σειρά (μεταθέσεις $12-j+1$ ειδών στοιχείων που το ένα στοιχείο, το Ι, εμφανίζεται j φορές ενώ τα υπόλοιπα $12-j$ στοιχεία από μια φορά το καθένα) με $\frac{12!}{j!(1!)^{12-j}} = \frac{12!}{j!}$ τρόπους. Συνεπώς έχουμε από πολλαπλασιαστική αρχή συνολικά $\binom{23}{12-j}\frac{12!}{j!} = \frac{23!12!}{(12-j)!(11+j)!j!}$ στις οποίες το γράμμα Ι μπορεί να εμφανίζεται ακριβώς j φορές, ενώ τα υπόλοιπα το πολύ 1 φορά και μετά εφαρμόζουμε την αρχή του αθροίσματος όπως παραπάνω.

(δ) Η κατασκευή μιας λέξης με 12 γράμματα που περιέχει όλα τα φωνήεντα και δεν περιέχει επαναλβανόμενα γράμματα μπορεί να γίνει σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε ποια θα είναι τα σύμφωνα που θα εμφανιστούν στη λέξη με $\binom{17}{5}$ τρόπους. Στο δεύτερο στάδιο διατάσουμε όλα τα γράμματα της λέξης (7 φωνήεντα και τα 5 επιλεχθέντα σύμφωνα) με 12! τρόπους. Από πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{17}{5} \cdot 12! = \frac{17!}{5!}$ τέτοιες λέξεις.

Εναλλακτικά μπορούμε να σκεφτούμε ότι επιλέγουμε με τη σειρά 7 θέσεις από τις 12, χωρίς επανάληψη, για να βάλουμε τα φωνήεντα και κατόπιν από τα 17 σύμφωνα επιλέγουμε με τη σειρά 5, χωρίς επανάληψη για να τα βάλουμε στις θέσεις που είναι ακόμα κενές. Από πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν συνολικά $(12)_7(17)_5 = \frac{12!17!}{5!12!} = \frac{17!}{5!}$ τέτοιες λέξεις.

Θέμα 2. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{\kappa=0}^{\nu-1}\left(\kappa+\nu\binom{\nu}{\kappa}\right)\binom{\nu}{\kappa} &= \sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\kappa\binom{\nu}{\kappa}+\nu\sum_{\kappa=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{\kappa}^2 \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\kappa\frac{\nu}{\kappa}\binom{\nu-1}{\kappa-1}+\nu\sum_{\kappa=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{\kappa}\binom{\nu}{\nu-\kappa} \\
&= \nu\sum_{j=0}^{\nu-2}\binom{\nu-1}{j}+\nu\left[\sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}\binom{\nu}{\nu-\kappa}-\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu}{0}\right] \\
&= \nu(2^{\nu-1}-1)+\nu\left(\binom{2\nu}{\nu}-1\right)=\nu 2^{\nu-1}+\nu\binom{2\nu}{\nu}-2\nu,
\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες $\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu}{\kappa}\binom{\nu-1}{\kappa-1}$ και $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}$ των διωνυμικών συντελεστών και στην τέταρτη την ταυτότητα του Cauchy.

(β) Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $y_i=x_i-5\cdot\binom{\nu}{i}$, $i=1,2,\ldots,\nu$, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1+y_2+\cdots+y_\nu\le 5\cdot 2^\nu+3-5\sum_{i=1}^{\nu}\binom{\nu}{i}$. Χρησιμοποιώντας το διώνυμο του Newton έχουμε $\sum_{i=1}^{\nu}\binom{\nu}{i}=2^\nu-1$. Επομένως το πρόβλημα έχει αναχθεί στην εύρεση του πλήθους των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της ανίσωσης $y_1+y_2+\cdots+y_\nu\le 8$. Αλλά αυτό ισούται με το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $y_1+y_2+\cdots+y_\nu+y_{\nu+1}=8$ που ταυτίζεται με το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών $\nu+1$ ανά 8, δηλαδή είναι $\left[{\nu+1 \atop 8}\right]=\binom{\nu+1+8-1}{8}=\binom{\nu+8}{8}=\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+8)}{8!}$.

Θέμα 3. (α) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση του πλήθους των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=2000$, υπό τους περιορισμούς $10\le x_i\le 1010$ για $i=1,2,\ldots,100$. Με το μετασχηματισμό $y_i=x_i-10$, $i=1,2,\ldots,100$, το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό του πλήθους των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $y_1+y_2+\cdots+y_{100}=1000$, υπό τους περιορισμούς $0\le y_i\le 1000$ για $i=1,2,\ldots,100$. Παρατηρούμε ότι οι δεξιοί περιορισμοί είναι περιττοί αφού η σχέση $y_1+y_2+\cdots+y_{100}=1000$ και οι περιορισμοί $y_i\ge 0$, $i=1,2,\ldots,100$ συνεπάγονται ότι $y_i\le 1000$, $i=1,2,\ldots,100$. Επομένως το ζητούμενο πλήθος ανάγεται στο πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1+y_2+\cdots+y_{100}=1000$ που είναι $\left[{100 \atop 1000}\right]=\binom{1099}{1000}$.

(β) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση του πλήθους των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=2000$, υπό τους περιορισμούς $0\le x_1\le 550$ για $i=1,2,\ldots,100$. Θέτουμε Ω το σύνολο των ακέραιων μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης και A_i το σύνολο των ακέραιων μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης με $x_i\ge 551$ για $i=1,2,\ldots,100$. Το ζητούμενο πλήθος είναι τότε το $N(A_1'A_2'\cdots A_{100}')$ που θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Έχουμε ότι $N(\Omega)=\left[{100 \atop 2000}\right]$, $N(A_i)=\left[{100 \atop 1449}\right]$ (το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1+y_2+\cdots+y_{100}+551=2000$), $i=1,2,\ldots,100$, $N(A_iA_j)=\left[{100 \atop 898}\right]$ (το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1+y_2+\cdots+y_{100}+2\cdot 551=2000$), $i\ne j$, $N(A_iA_jA_k)=\left[{100 \atop 347}\right]$ (το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1+y_2+\cdots+y_{100}+3\cdot 551=2000$), $i\ne j\ne k\ne i$, ενώ οι τομές 4 ή παραπάνω διακεκριμένων συνόλων από τα $A_1,A_2,\ldots,A_{100}$ είναι κενά σύνολα. Καταλήγουμε στο ότι το ζητούμενο πλήθος είναι το $N(A'_1 A'_2 \cdots A'_{100}) = \left[{100 \atop 2000}\right] - \binom{100}{1}\left[{100 \atop 1449}\right] + \binom{100}{2}\left[{100 \atop 898}\right] - \binom{100}{3}\left[{100 \atop 347}\right]$.

Θέμα 4. (α) Η γεννήτρια των συνδυασμών 4 ανά k με επανάληψη του συνόλου $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου τα στοιχεία ω_1, ω_2 επιτρέπεται να εμφανίζονται οποιονδήποτε αριθμό φορών (χωρίς περιορισμό), το στοιχείο ω_3 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ μια φορά, και το στοιχείο ω_4 επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών (0 ή 2 ή 4 ή $\ldots$) είναι η $A(t) = (1 + t + t^2 + t^3 + \cdots)^2(1 + t)(1 + t^2 + t^4 + t^6 + \cdots)$, που χρησιμοποιώντας το άπειρο άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου γράφεται στη συνεπτυγμένη μορφή $A(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 (1+t)\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)^3}$. Ο συντελεστής του t^κ στη σειρά είναι ο επαναληπτικός συνδυασμός 3 ανά κ, δηλαδή ο $\left[{3 \atop \kappa}\right] = \binom{3+\kappa-1}{\kappa} = (\kappa+1)(\kappa+2)/2$. Συνεπώς για $\kappa = 100$ έχουμε 5151 τέτοιους συνδυασμούς.

(β) Η (εκθετική) γεννήτρια των διατάξεων είναι η $E(t) = (e^t)^{\nu-2} \cdot (e^t - 1)^2 = e^{\nu t} - 2e^{(\nu-1)t} + e^{(\nu-2)t}$. Κατόπιν χρησιμοποιούμε την εκθετική σειρά $e^t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}$ για να αναπτύξουμε την $E(t)$ σε δυνάμεις του t^k. Τελικά έχουμε $\alpha_\kappa = \nu^k - 2(\nu-1)^k + (\nu-2)^k$, $k = 0, 1, \ldots$.