ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2011 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α - ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1. Στο Κίνο κληρώνονται 20 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 80$ (δεν ενδιαφέρει η σειρά εξαγωγής των κλήρων και δεν γίνεται επανάθεση των κλήρων, οπότε κάθε αριθμός από τους $1, 2, \ldots, 80$ εμφανίζεται το πολύ μια φορά). Ένα αποτέλεσμα της κλήρωσης είναι επομένως ένα σύνολο 20 αριθμών από τους $1, 2, \ldots, 80$. Ένας παίκτης επιλέγει 10 αριθμούς από τους $1, 2, \ldots, 80$ και συμπληρώνει το δελτίο του με αυτούς.

(α) Να βρεθεί ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης που έχουν ακριβώς j κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη.

(β) Να βρεθεί ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης που έχουν το πολύ 9 κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη.

Λύση: Ένα αποτέλεσμα της κλήρωσης που έχει ακριβώς j κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη μπορεί να θεωρηθεί ότι κατασκευάζεται σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο θα πρέπει να επιλεγούν j από τους 10 αριθμούς του δελτίου του παίκτη για να εξαχθούν κατά την κλήρωση. Η επιλογή αυτή γίνεται με $\binom{10}{j}$ τρόπους δεδομένου ότι δεν ενδιαφέρει η σειρά εγαξωγής των κλήρων, ούτε γίνεται επανάθεση. Στο δεύτερο στάδιο θα πρέπει να επιλεγούν $20 - j$ από τους 70=80-10 αριθμούς που δεν περιέχονται στο δελτίο του παίκτη για να εξαχθούν κατά την κλήρωση. Η επιλογή αυτή γίνεται με $\binom{70}{20-j}$ τρόπους, ανεξάρτητα από το ποιά επιλογή έχει γίνει στο πρώτο στάδιο. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{10}{j}\binom{70}{20-j}$ δυνατά αποτελέσματα της κλήρωσης που να έχουν ακριβώς j κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη (απάντηση στο (α)).

Ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης που έχουν το πολύ 9 κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη ισούται με τον αριθμό των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης ($\binom{80}{20}$) μείον τον αριθμό των δυνατών αποτελεσμάτων που έχουν 10 κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη ($\binom{10}{10}\binom{70}{20-10}$). Επομένως είναι $\binom{80}{20} - \binom{70}{10}$.

Εναλλακτικά, ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης που έχουν το πολύ 9 κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη βρίσκεται χρησιμοποιώντας την αρχή του αθροίσματος και θα είναι το $\sum_{j=0}^{9}\binom{10}{j}\binom{70}{20-j}$. Επειδή $\binom{10}{j} = 0$ για $j \geq 11$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{9}\binom{10}{j}\binom{70}{20-j} &= \sum_{j=0}^{10}\binom{10}{j}\binom{70}{20-j} - \binom{10}{10}\binom{70}{20-10} \\
&= \sum_{j=0}^{20}\binom{10}{j}\binom{70}{20-j} - \binom{10}{10}\binom{70}{20-10} \\
&= \binom{10+70}{20} - \binom{10}{10}\binom{70}{20-10} \\
&= \binom{80}{20} - \binom{70}{10},
\end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα έχει χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Cauchy $\sum_{j=0}^{n}\binom{r}{j}\binom{s}{n-j} = \binom{r+s}{n}$.

Επομένως, υπάρχουν συνολικά $\binom{80}{20} - \binom{70}{10}$ αποτελέσματα της κλήρωσης που έχουν το πολύ 9 κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη (απάντηση στο (β)).

Θέμα 2. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι (κανονικό εξάεδρο) n φορές και καταγράφουμε με τη σειρά τις ενδείξεις. Ένα αποτέλεσμα είναι μια διατεταγμένη n-αδα $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.
(α) Να βρεθεί το πλήθος των αποτελεσμάτων $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ για τα οποία ισχύει $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n$.
(β) Να βρεθεί το πλήθος των αποτελεσμάτων $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ στα οποία καθένας από τους αριθμούς $1, 2, 3$ εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά.

Λύση: Ένα αποτέλεσμα για το οποίο ισχύει $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n$ προσδιορίζεται πλήρως από τους αριθμούς των εμφανίσεων $x_1, x_2, \ldots, x_6$ των ενδείξεων $1, 2, \ldots, 6$ αντίστοιχα. Π.χ. για $n = 12$ το αποτέλεσμα

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}) = (1, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 6)$$

αντιστοιχεί στο διάνυσμα

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (4, 1, 0, 4, 1, 2)$$

των αριθμών εμφανίσεων των ενδείξεων. Επομένως, το πλήθος των αποτελεσμάτων $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ για τα οποία ισχύει $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n$ ισούται με το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = n$ που ισούται με το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη 6 ανά n (απάντηση στο (α)).
Έστω τώρα Ω το σύνολο των αποτελεσμάτων $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Έστω επίσης A_1 το υποσύνολο του Ω που περιέχει τα αποτελέσματα στα οποία δεν εμφανίζεται η ένδειξη 1. Ομοίως, ορίζουμε A_2 και A_3 να είναι τα υποσύνολα του Ω που περιέχουν τα αποτελέσματα στα οποία δεν εμφανίζονται οι ενδείξεις 2 και 3 αντίστοιχα. Το πλήθος των αποτελεσμάτων $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ στα οποία καθένας από τους αριθμούς $1, 2, 3$ εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά, είναι $N(A_1' A_2' A_3')$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε (την απάντηση στο (β)):

$$\begin{aligned} N(A_1' A_2' A_3') &= N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) + N(A_1 A_2) + N(A_1 A_3) + N(A_2 A_3) - N(A_1 A_2 A_3) \\ &= 6^n - 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 4^n - 3^n. \end{aligned}$$

Θέμα 3. Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{\nu+1} = 2\nu$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} &x_1 \geq 0 \\ &x_1 \leq x_2 \leq x_1 + 1 \\ &0 \leq x_i \leq 1, \;\; i = 3, 4, \ldots, \nu + 1. \end{aligned}$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $z = x_1$, $y_1 = x_2 - x_1$, $y_i = x_{i+1}$, $i = 2, 3, \ldots, \nu$ έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$2z + y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu = 2\nu$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} & z \geq 0 \\ & 0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu. \end{aligned}$$

Για κάθε δυνατή τιμή j της μεταβλητής z η εξίσωση $2z+y_1+y_2+\cdots+y_\nu = 2\nu$ γράφεται $y_1+y_2+\cdots+y_\nu = 2(\nu-j)$ και έχει ακριβώς $\binom{\nu}{2(\nu-j)}$ ακέραιες λύσεις με $0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu$. Επομένως το συνολικό πλήθος ακέραιων λύσεων της αρχικής εξίσωσης υπό τους αρχικούς περιορισμούς είναι

$$\sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{2(\nu-j)} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{2k} = \sum_{k \text{ άρτιος}} \binom{\nu}{k} \equiv S_\alpha.$$

Για τον υπολογισμό του S_α, θεωρούμε επίσης το άθροισμα $S_\pi = \sum_{k \text{ περιττός}} \binom{\nu}{k}$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} S_\alpha + S_\pi &= \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} = 2^\nu \\ S_\alpha - S_\pi &= \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{\nu}{k} = (1 + (-1))^n = 0. \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $S_\alpha = 2^{\nu-1}$ (συνολικό πλήθος ακέραιων λύσεων της αρχικής εξίσωσης υπό τους αρχικούς περιορισμούς).

Θέμα 4. Έστω α_κ το πλήθος των συνδυασμών $2\nu + 2$ ανά κ με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2\nu+2}\}$ όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2\nu+1}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ μια φορά το καθένα και το στοιχείο $\omega_{2\nu+2}$ επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών (0 ή 2 ή 4 ή ...).

(α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνδυασμών $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa t^\kappa$.

(β) Να υπολογιστεί η διαφορά $\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa-1}$, $\kappa \geq 1$.

(γ) Να υπολογιστεί (δηλ. να βρεθεί κλειστός τύπος για) το α_ν.

Λύση: Χρησιμοποιώντας τη γνωστή διαδικασία με τις απαριθμήτριες των διαφόρων στοιχείων έχουμε ότι η γεννήτρια $A(t)$ δίνεται ως

$$A(t) = (1+t)^{2\nu+1}(1+t^2+t^4+\cdots) = (1+t)^{2\nu+1}(1-t^2)^{-1} = (1+t)^{2\nu+1}/((1+t)(1-t)) = (1+t)^{2\nu}(1-t)^{-1}.$$

Έχουμε ότι

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa t^\kappa = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2\nu}{j} t^j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} t^j.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του t^κ παίρνουμε

$$\alpha_\kappa = \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{2\nu}{j}, \quad \kappa = 0, 1, \ldots.$$

Επομένως έχουμε άμεσα ότι $\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa-1} = \binom{2\nu}{\kappa}$. Ειδικά για $\kappa = \nu$ το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &= \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{j} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{j} + \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2\nu - j} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{j} + \sum_{j=\nu}^{2\nu} \binom{2\nu}{j} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\binom{2\nu}{\nu} + \sum_{j=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{j} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\binom{2\nu}{\nu} + 2^{2\nu} \right).
\end{aligned}$$