

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΜΑΡΤΙΟΣ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

B

Θέμα 1. Θεωρούμε όλους τους επταψήφιους αριθμούς από το 1000000 ως το 5999999 (σε κάθε τέτοιον αριθμό το πρώτο ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\{1, 2, \dots, 5\}$ και τα υπόλοιπα έξι στο σύνολο $\{0, 1, \dots, 9\}$).

- (α) Πόσοι αριθμοί από αυτούς έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;
- (β) Πόσοι αριθμοί από αυτούς είναι περιττοί;
- (γ) Πόσοι αριθμοί από αυτούς είναι περιττοί και έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;
- (δ) Πόσοι αριθμοί από αυτούς περιέχουν το ψηφίο 4;
- (ε) Πόσοι αριθμοί από αυτούς περιέχουν ακριβώς τρεις φορές το ψηφίο 6 και ακριβώς τρεις φορές το ψηφίο 7;

Απάντηση: (α) Το πρώτο ψηφίο επιλέγεται με 5 τρόπους, το δεύτερο με 9 (αρκεί να είναι διαφορετικό από το πρώτο), το τρίτο με 8 (αρκεί να είναι διαφορετικό από τα δύο πρώτα) κ.λπ., και έτσι, υπάρχουν $5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot (9)_6$ αριθμοί με διαφορετικά ψηφία. (β) Το πρώτο ψηφίο επιλέγεται με 5 τρόπους, το δεύτερο, τρίτο, τέταρτο, πέμπτο και έκτο με 10 (μπορούμε να βάλουμε ο,τιδήποτε) και το τελευταίο με 5 (αρκεί να είναι περιττός), και έτσι, υπάρχουν $5 \cdot 10^5 \cdot 5$ περιττοί αριθμοί. (γ) Οι περιττοί του συνόλου $\{1, 2, \dots, 5\}$ είναι οι 1, 3 και 5 – τρεις το πλήθος. Διαλέγοντας πρώτα το τελευταίο ψηφίο, μετά το πρώτο, και στη συνέχεια το δεύτερο, τρίτο, τέταρτο, πέμπτο και έκτο ψηφίο του αριθμού, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν $3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 12 \cdot (8)_5$ αριθμοί με διαφορετικά ψηφία που λήγουν σε 1, 3 ή 5. Ομοίως, από την πολλαπλασιαστική αρχή βρίσκουμε ότι υπάρχουν $2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 10 \cdot (8)_5$ αριθμοί με διαφορετικά ψηφία που λήγουν σε 7 ή 9. Επειδή τα δύο παραπάνω σύνολα αριθμών είναι ξένα διαπιστώνουμε, από την αρχή του αθροίσματος, ότι υπάρχουν $12 \cdot (8)_5 + 10 \cdot (8)_5 = 22 \cdot (8)_5$ περιττοί αριθμοί με διαφορετικά ψηφία. (δ) Προφανώς το σύνολο όλων των θεωρούμενων αριθμών, Ω , περιέχει, συνολικά, $5 \cdot 10^6$ αριθμούς. Από αυτούς υπάρχουν ακριβώς $4 \cdot 9^6$ οι οποίοι δεν περιέχουν τεσσάρι, επομένως οι υπόλοιποι $5 \cdot 10^6 - 4 \cdot 9^6$ περιέχουν τουλάχιστον ένα τεσσάρι. (ε) Διαλέγουμε για την πρώτη θέση του αριθμού ένα ψηφίο από τα 1, 2, ..., 5 με 5 τρόπους. Στη συνέχεια, μεταθέτουμε στις υπόλοιπες 6 θέσεις του αριθμού τα τρία εξάρια και τα τρία επτάρια κατά $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6!}{(3!)^2} = 20$ τρόπους – μεταθέσεις δύο ειδών στοιχείων. Από την πολλαπλασιαστική αρχή το ζητούμενο πλήθος ισούται με $5 \cdot 20 = 100$.

Θέμα 2. Υπολογίστε τα αθροίσματα:

$$(\alpha) \sum_{\kappa=0}^{\nu} \kappa(\nu - \kappa) \binom{4}{\kappa} \binom{7}{\nu - \kappa}, \quad (\beta) \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2j} 4^j 7^{2\nu-2j}.$$

Απάντηση: (α) Αν $\kappa = 0$ τότε $\kappa(\nu - \kappa) \binom{4}{\kappa} \binom{7}{\nu - \kappa} = 0$, και το ίδιο συμβαίνει όταν $\kappa = \nu$. Επομένως το άθροισμα ισούται με 0 όταν $\nu = 0$ ή $\nu = 1$. Υποθέτοντας ότι $\nu \geq 2$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\kappa \binom{4}{\kappa} = 4 \binom{3}{\kappa - 1} \text{ και } (\nu - \kappa) \binom{7}{\nu - \kappa} = 7 \binom{6}{\nu - \kappa - 1} \text{ για κάθε } \kappa = 1, 2, \dots, \nu - 1,$$

το άθροισμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sum_{\kappa=0}^{\nu} \kappa(\nu - \kappa) \binom{4}{\kappa} \binom{7}{\nu - \kappa} &= 0 + \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \kappa(\nu - \kappa) \binom{4}{\kappa} \binom{7}{\nu - \kappa} + 0 \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \left[\kappa \binom{4}{\kappa} \right] \cdot \left[(\nu - \kappa) \binom{7}{\nu - \kappa} \right] \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \left[4 \binom{3}{\kappa - 1} \right] \cdot \left[7 \binom{6}{\nu - \kappa - 1} \right] \\
&= 28 \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \binom{3}{\kappa - 1} \binom{6}{\nu - \kappa - 1} \\
&= 28 \sum_{j=0}^{\nu-2} \binom{3}{j} \binom{6}{\nu - 2 - j} = 28 \binom{9}{\nu - 2},
\end{aligned}$$

όπου κάναμε την αντικατάσταση $j = \kappa - 1$ και χρησιμοποιήσαμε τον τύπο Cauchy.

(β) Ας ονομάσουμε S_α το ζητούμενο άθροισμα. Είναι

$$S_\alpha = \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2j} 4^j 7^{2\nu-2j} = \sum_{j=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2j} 2^{2j} 7^{2\nu-2j} = \sum_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \text{ άρτιος}}}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} 2^\kappa 7^{2\nu-\kappa}.$$

Επομένως, θεωρώντας και το αντίστοιχο άθροισμα για περιττά κ ,

$$S_\pi = \sum_{\substack{\kappa=0 \\ \kappa \text{ περιττός}}}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} 2^\kappa 7^{2\nu-\kappa},$$

βλέπουμε, από το Διωνυμικό Θεώρημα, ότι

$$S_\alpha + S_\pi = \sum_{\kappa=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} 2^\kappa 7^{2\nu-\kappa} = (2 + 7)^{2\nu} = 9^{2\nu},$$

$$S_\alpha - S_\pi = \sum_{\kappa=0}^{2\nu} (-1)^\kappa \binom{2\nu}{\kappa} 2^\kappa 7^{2\nu-\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} (-2)^\kappa 7^{2\nu-\kappa} = (-2 + 7)^{2\nu} = 5^{2\nu}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $2S_\alpha = 9^{2\nu} + 5^{2\nu}$ δηλαδή $S_\alpha = \frac{9^{2\nu} + 5^{2\nu}}{2} = \frac{81^\nu + 25^\nu}{2}$.

Θέμα 3. (α) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu + x_{\nu+1} + x_{\nu+2} + \cdots + x_{2\nu} = 8 + 3\nu$$

με τους περιορισμούς $x_1 \geq 3, x_2 \geq 3, \dots, x_\nu \geq 3, x_{\nu+1} \in \{0, 1\}, x_{\nu+2} \in \{0, 1\}, \dots, x_{2\nu} \in \{0, 1\}$.

(β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 20 όμοια σφαιρίδια στα κελιά k_1, k_2, \dots, k_8 , αν τα κελιά k_1, k_2 και k_3 έχουν χωρητικότητα 6 σφαιριδίων το καθένα ενώ τα k_4, k_5, \dots, k_8 έχουν άπειρη χωρητικότητα;

Απάντηση: (α) Θέτοντας $y_i = x_i - 3$ για $i = 1, 2, \dots, \nu$ και $y_i = x_i$ για $i = \nu + 1, \dots, 2\nu$, η δοθείσα εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$(y_1 + 3) + \dots + (y_\nu + 3) + y_{\nu+1} + \dots + y_{2\nu} = 8 + 3\nu,$$

δηλαδή στην

$$y_1 + \dots + y_\nu + y_{\nu+1} + \dots + y_{2\nu} = 8,$$

με τους περιορισμούς $y_i \geq 0$ για $i = 1, \dots, \nu$ και $y_i \in \{0, 1\}$ για $i = \nu + 1, \dots, 2\nu$, η οποία έχει τον ίδιο αριθμό ακεραίων λύσεων με την αρχική εξίσωση. [Πράγματι, κάθε λύση $(y_1, \dots, y_\nu, y_{\nu+1}, \dots, y_{2\nu})$ της παραπάνω εξίσωσης αντιστοιχεί σε ακριβώς μία λύση $(x_1, \dots, x_\nu, x_{\nu+1}, \dots, x_{2\nu})$ της αρχικής, και συγκεκριμένα, στη λύση εκείνη που $x_i = y_i + 3$ για $i = 1, \dots, \nu$ και $x_i = y_i$ για $i = \nu + 1, \dots, 2\nu$.] Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε σταθερό $j \in \{0, 1, \dots, 8\}$, ο αριθμός λύσεων της $y_{\nu+1} + \dots + y_{2\nu} = j$ με $y_i \in \{0, 1\}$ για $i = \nu + 1, \dots, 2\nu$ ισούται με $\binom{\nu}{j}$, όσοι και οι τρόποι που διαλέγουμε j από τα $y_{\nu+1}, \dots, y_{2\nu}$ στα οποία θα δώσουμε την τιμή 1, ενώ στα υπόλοιπα y_i θα δώσουμε την τιμή 0. Όμως, όταν $y_{\nu+1} + \dots + y_{2\nu} = j$, η εξίσωση γράφεται ως $y_1 + \dots + y_\nu = 8 - j$ με $y_i \geq 0$ για $i = 1, \dots, \nu$ και, προφανώς, υπάρχουν $\left[\begin{smallmatrix} \nu \\ 8 - j \end{smallmatrix} \right]$ διαφορετικές λύσεις ως προς (y_1, \dots, y_ν) . Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι για κάθε $j \in \{0, 1, \dots, 8\}$, η εξίσωση έχει $\binom{\nu}{j} \left[\begin{smallmatrix} \nu \\ 8 - j \end{smallmatrix} \right]$ διαφορετικές λύσεις με $y_{\nu+1} + \dots + y_{2\nu} = j$, και έτσι, από την αρχή του αθροίσματος προκύπτει ότι η αρχική εξίσωση έχει

$$\sum_{j=0}^8 \binom{\nu}{j} \left[\begin{smallmatrix} \nu \\ 8 - j \end{smallmatrix} \right] = \sum_{j=0}^8 \binom{\nu}{8 - j} \left[\begin{smallmatrix} \nu \\ j \end{smallmatrix} \right]$$

λύσεις.

(β) Θέτοντας $x_i = \text{πλήθος σφαιριδίων που τοποθετούνται στο κελί } k_i, i = 1, 2, \dots, 8$, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + \dots + x_8 = 20$ με $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1, \dots, 6\}$ και $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$. Θέτουμε $\Omega = \{\text{όλες οι ακέραιες λύσεις της } x_1 + \dots + x_8 = 20 \text{ με } x_i \geq 0 \text{ για } i = 1, 2, \dots, 8\}$, $A_1 = \{\text{οι ακέραιες λύσεις της } x_1 + \dots + x_8 = 20 \text{ με } x_1 \geq 7 \text{ και } x_i \geq 0 \text{ για } i = 2, \dots, 8\}$, $A_2 = \{\text{οι ακέραιες λύσεις της } x_1 + \dots + x_8 = 20 \text{ με } x_2 \geq 7 \text{ και } x_i \geq 0 \text{ για } i = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και $A_3 = \{\text{οι ακέραιες λύσεις της } x_1 + \dots + x_8 = 20 \text{ με } x_3 \geq 7 \text{ και } x_i \geq 0 \text{ για } i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Επομένως ζητάμε τον πληθάρημο του $A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3$. Προφανώς $N(\Omega) = \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 20 \end{smallmatrix} \right]$, $N(A_1) = N(A_2) = N(A_3) = \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 13 \end{smallmatrix} \right]$ [διότι, π.χ., το $N(A_1)$ ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων (ως προς (y_1, \dots, y_8)) της εξίσωσης $(y_1 + 7) + y_2 + \dots + y_8 = 20$], $N(A_1 \cap A_2) = N(A_1 \cap A_3) = N(A_2 \cap A_3) = \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 6 \end{smallmatrix} \right]$ [διότι, π.χ., το $N(A_1 \cap A_2)$ ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων (ως προς (y_1, \dots, y_8)) της εξίσωσης $(y_1 + 7) + (y_2 + 7) + y_3 + \dots + y_8 = 20$] και

$N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ -1 \end{smallmatrix} \right] = 0$ [η εξίσωση $(y_1+7)+(y_2+7)+(y_3+7)+y_4+\dots+y_8 = 20$ δεν έχει μη αρνητικές λύσεις ως προς (y_1, \dots, y_8)]. Συνεπώς, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, ο αριθμός των ζητούμενων τοποθετήσεων ισούται με

$$\begin{aligned} N(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) &= N(\Omega) - [N(A_1) + N(A_2) + N(A_3)] \\ &\quad + [N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3)] - N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 20 \end{smallmatrix} \right] - 3 \cdot \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 13 \end{smallmatrix} \right] + 3 \cdot \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 6 \end{smallmatrix} \right] - 0. \end{aligned}$$

Θέμα 4. Έστω α_κ το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των $\nu + 1$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ ανά κ , όπου το $\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται να εμφανίζεται περιττό αριθμό φορές στη διάταξη (1 ή 3 ή 5 ή ...), ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία του Ω δεν υπάρχει περιορισμός. Υπολογίστε

(α) την εκθετική γεννήτρια,

$$E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa \frac{t^\kappa}{\kappa!}, \quad \text{και}$$

(β) τον αριθμό α_κ .

Απάντηση: (α) Η απαριθμητήρια διατάξεων του στοιχείου $\omega_{\nu+1}$ είναι

$$E_{\nu+1}(t) = \sum_{s \geq 0, \text{ περιττός}} \frac{t^s}{s!} = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

ενώ για τα υπόλοιπα στοιχεία ω_i , $i = 1, 2, \dots, \nu$, έχουμε

$$E_i(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots = e^t, \quad i = 1, 2, \dots, \nu.$$

Επομένως, η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια διατάξεων είναι η

$$E(t) = E_1(t) \cdots E_\nu(t) E_{\nu+1}(t) = (e^t)^\nu \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) e^{\nu t}.$$

(β) Αναπτύσσοντας την παραπάνω γεννήτρια σε δυναμοσειρά, σύμφωνα με την εκθετική συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} (e^{(\nu+1)t} - e^{(\nu-1)t}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{((\nu+1)t)^\kappa}{\kappa!} - \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{((\nu-1)t)^\kappa}{\kappa!} \right) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\nu+1)^\kappa - (\nu-1)^\kappa}{2} \right\} \frac{t^\kappa}{\kappa!}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο αριθμός α_κ ισούται με τον συντελεστή του $\frac{t^\kappa}{\kappa!}$ στο προηγούμενο ανάπτυγμα, δηλ. $\alpha_\kappa = \frac{(\nu+1)^\kappa - (\nu-1)^\kappa}{2}$.