ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2013, Θέματα και λύσεις A

Θέμα 1. Θεωρούμε δύο σύνολα $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{10}\}$ και $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_{20}\}$ με 10 και 20 στοιχεία, αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι $A \cap B = \emptyset$, και θέτουμε $\Omega = A \cup B$. Να υπολογίσετε
(α) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία, 5 από τα οποία ανήκουν στο A (και τα υπόλοιπα 4 στο B).
(β) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν ακριβώς 5 στοιχεία από το A και οσαδήποτε από το B.
(γ) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν άρτιο αριθμό στοιχείων από το A και ακριβώς 4 στοιχεία από το B.
(δ) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν το πολύ 9 στοιχεία από το A και ακριβώς 4 στοιχεία από το B.
(ε) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο από το A και τουλάχιστον ένα στοιχείο από το B.

Λύση: (α) Ένα υποσύνολο του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία, 5 από τα οποία ανήκουν στο A και τα υπόλοιπα 4 στο B φτιάχνεται σε δυό στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε τα 5 από τα 10 στοιχεία του A που θα μπουν στο υποσύνολο με $\binom{10}{5}$ τρόπους και στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε τα 4 από τα 20 στοιχεία του B που θα μπούν στο υποσύνολο με $\binom{20}{4}$ τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{10}{5}\binom{20}{4}$ τέτοια υποσύνολα.

(β) Ένα υποσύνολο του Ω που περιέχει ακριβώς 5 στοιχεία από το A και οσαδήποτε από το B φτιάχνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε τα 5 από τα 10 στοιχεία του A που θα μπουν στο υποσύνολο με $\binom{10}{5}$ τρόπους και στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σύνολο στοιχείων του B που θα μπουν στο υποσύνολο με 2^{20} τρόπους (όσα είναι δηλαδή τα δυνατά υποσύνολα του B). Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{10}{5}2^{20}$ τέτοια υποσύνολα.

(γ) Ένα υποσύνολο του Ω που περιέχει άρτιο αριθμό στοιχείων από το A και ακριβώς 4 στοιχεία από το B φτιάχνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε ένα υποσύνολο του A με άρτιο αριθμό στοιχείων για να μπουν στο υποσύνολο με $\sum_{k \text{ άρτιος}} \binom{10}{k}$ τρόπους και στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε τα 4 από τα 20 στοιχεία του B που θα μπούν στο υποσύνολο με $\binom{20}{4}$ τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά $\left(\sum_{k \text{ άρτιος}} \binom{10}{k}\right)\binom{20}{4}$ τέτοια σύνολα. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\sum_{k \text{ άρτιος}} \binom{10}{k} + \sum_{k \text{ περιττός}} \binom{10}{k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10},$$

$$\sum_{k \text{ άρτιος}} \binom{10}{k} - \sum_{k \text{ περιττός}} \binom{10}{k} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} = 0,$$

οπότε λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $\sum_{k \text{ άρτιος}} \binom{10}{k} = 2^9$. Επομένως, τελικά υπάρχουν συνολικά $2^9\binom{20}{4}$ τέτοια υποσύνολα.

(δ) Ένα υποσύνολο του Ω που περιέχει το πολύ 9 στοιχεία από το A και ακριβώς 4 στοιχεία από το B φτιάχνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε ένα υποσύνολο του A με το πολύ 9 στοιχεία για να μπουν στο υποσύνολο με $\sum_{k=0}^{9}\binom{10}{k} = 2^{10}-1$ τρόπους και στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε τα 4 από τα 20 στοιχεία του B που θα μπούν στο υποσύνολο με $\binom{20}{4}$ τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά $(2^{10}-1)\binom{20}{4}$ τέτοια σύνολα.

(ε) Το πλήθος των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο από το A και τουλάχιστον ένα στοιχείο από το B βρίσκεται υπολογίζοντας το πλήθος όλων των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία και αφαιρώντας το πλήθος των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που προέρχονται όλα αποκλειστικά από το A ή αποκλειστικά από το B. Συνεπώς το πλήθος των υποσυνόλων αυτών είναι $\binom{10+20}{9} - \binom{10}{9} - \binom{20}{9} = \binom{30}{9} - \binom{10}{9} - \binom{20}{9}$.

Θέμα 2. (α) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων λύσεων $(x_1, \ldots, x_5)$ της εξίσωσης

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_4+x_5) = 25$$

με τους περιορισμούς $0 \le x_i \le 6$, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

(β) Να βρείτε το πλήθος των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων $(x_1, \ldots, x_7)$ του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} (x_1+x_2+x_3)(x_4+x_5+x_6+x_7) &= 6 \\ (x_1+x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6+x_7) &= 5. \end{aligned}$$

Λύση: (α) Αφού ενδιαφερόμαστε για ακέραιες λύσεις και μάλιστα μη-αρνητικές και ισχύει $25 = 5^2$, θα πρέπει να ισχύει είτε $x_1+x_2+x_3 = 1, x_1+x_4+x_5 = 25$, είτε $x_1+x_2+x_3 = 5, x_1+x_4+x_5 = 5$, είτε $x_1+x_2+x_3 = 25, x_1+x_4+x_5 = 1$. Από αυτές τις περιπτώσεις μόνο η $x_1+x_2+x_3 = 5, x_1+x_4+x_5 = 5$ είναι δυνατή αφού λόγω των περιορισμών $0 \le x_i \le 6$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, δεν είναι δυνατό το άθροισμα τριών μεταβλητών να κάνει 25. Άρα το ζητούμενο πλήθος ακεραίων λύσεων ταυτίζεται με το πλήθος των ακεραίων λύσεων του συστήματος $x_1+x_2+x_3 = 5, x_1+x_4+x_5 = 5$, με τους περιορισμούς $0 \le x_i \le 6$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Στην πραγματικότητα όμως το δεξιό μέλος των περιορισμών είναι περιττό ($x_i \le 6$, $i = 1, 2, \ldots, 5$) αφού έτσι κι αλλιώς οι μεταβλητές είναι μη-αρνητικές και αθροίζουν στο 5. Τελικά, το ζητούμενο πλήθος ακεραίων λύσεων ταυτίζεται με το πλήθος των ακεραίων λύσεων του συστήματος $x_1+x_2+x_3 = 5, x_1+x_4+x_5 = 5$, με τους περιορισμούς $0 \le x_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Για κάθε δυνατή τιμή του x_1, $x_1 = k = 0, 1, \ldots, 5$ το σύστημα ανάγεται στο $x_2+x_3 = 5-k, x_4+x_5 = 5-k$, με τους περιορισμούς $0 \le x_i$, $i = 2, 3, 4, 5$ που έχει $\begin{bmatrix} 2 \\ 5-k \end{bmatrix}^2$ λύσεις (φυσικά δεν υπάρχουν λύσεις με $x_1 = 6$). Συνεπώς, με επίκληση της αρχής του αθροίσματος έχουμε συνολικά $\sum_{k=0}^{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 5-k \end{bmatrix}^2$ λύσεις.

(β) Αν θέσουμε $x_1+x_2+x_3=x$ και $x_4+x_5+x_6+x_7=y$, βλέπουμε ότι $x+y=5$ και $xy=6$, οπότε αναγκαστικά θα έχουμε $x=2, y=3$ ή $x=3, y=2$. Συνεπώς, κάθε λύση $(x_1,\ldots,x_7)$ του αρχικού συστήματος είναι λύση του συστήματος $x_1+x_2+x_3=2$, $x_4+x_5+x_6+x_7=3$ ή λύση του συστήματος $x_1+x_2+x_3=3$, $x_4+x_5+x_6+x_7=2$ και αντίστροφα. Το σύστημα $x_1+x_2+x_3=2$, $x_4+x_5+x_6+x_7=3$ έχει $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις λόγω της πολλαπλασιαστικής αρχής και ομοίως το σύστημα $x_1+x_2+x_3=3$, $x_4+x_5+x_6+x_7=2$ έχει $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την αρχή του αθροίσματος, έχουμε ότι το αρχικό σύστημα έχει συνολικά $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις.

Θέμα 3. (α) Σε ένα αμφιθέατρο εξετάζονται ταυτόχρονα 300 διακεκριμένοι φοιτητές, οι $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{100}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Α), οι $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{100}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Β) και οι $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{100}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Γ). Καθένας από αυτούς παραδίδει το γραπτό του και τότε καταγράφεται το όνομά του σε μία λίστα (διατεταγμένη 300-άδα). Με πόσους τρόπους γίνεται να σχηματιστεί η λίστα αυτή έτσι ώστε στις πρώτες 10 θέσεις της λίστας να περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένας φοιτητής από κάθε κατηγορία θεμάτων;

(β) Να υπολογίσετε των αριθμό των επαναληπτικών διατάξεων των 13 στοιχείων του $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\ldots\omega_{12}\}$ ανά 52, αν το ω_0 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ 3 φορές ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία επιτρέπεται να εμφανίζονται 0 ή 10 φορές το καθένα.

Λύση: (α) Έστω Ω το σύνολο όλων των δυνατών 300-άδων φοιτητών, Α το σύνολο των δυνατών 300-άδων χωρίς να υπάρχουν φοιτητές της κατηγορίας Α στις πρώτες 10 θέσεις, Β το σύνολο των δυνατών 300-άδων χωρίς να υπάρχουν φοιτητές της κατηγορίας Β στις πρώτες 10 θέσεις και Γ το σύνολο των δυνατών 300-άδων χωρίς να υπάρχουν φοιτητές της κατηγορίας Γ στις πρώτες 10 θέσεις. Τότε το ζητούμενο πλήθος τρόπων είναι $N(A'B'\Gamma')$ που από την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού είναι ίσο με $N(\Omega)-N(A)-N(B)-N(\Gamma)+N(AB)+N(A\Gamma)+N(B\Gamma)-N(AB\Gamma)$. Έχουμε ότι $N(\Omega)=300!$, αφού κάθε μετάθεση των φοιτητών είναι αποδεκτή 300-άδα του Ω. Επίσης $N(A)=(200)_{10}290!$, αφού μια 300-άδα που δεν περιλαμβάνει φοιτητές της κατηγορίας Α στις πρώτες 10 θέσεις φτιάχνεται σε 2 στάδια: Πρώτα επιλέγουμε 10 από τους 200 φοιτητές των κατηγοριών Β και Γ για τις πρώτες δέκα θέσεις και τους βάζουμε στη σειρά με $(200)_{10}$ τρόπους και κατόπιν βάζουμε τους υπόλοιπους 290 φοιτητές στη σειρά. Ομοίως βρίσκουμε $N(B)=N(\Gamma)=(200)_{10}290!$. Με ανάλογο σκεπτικό έχουμε $N(AB)=N(A\Gamma)=N(B\Gamma)=(100)_{10}290!$, ενώ $N(AB\Gamma)=0$. Τελικά το πλήθος των τρόπων για να σχηματιστεί η λίστα (300-άδα) των φοιτητών ώστε στις πρώτες 10 θέσεις να περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένας φοιτητής από κάθε κατηγορία είναι $300!-3(200)_{10}290!+3(100)_{10}290!$.

(β) Χρησιμοποιούμε γεννήτριες διατάξεων. Η εκθετική απαριθμήτρια του στοιχείου ω_0 είναι $E_0(t,x_0)=1+\frac{tx_0}{1!}+\frac{(tx_0)^2}{2!}+\frac{(tx_0)^3}{3!}$ ενώ για τα στοιχεία ω_j, $j=1,2,\ldots 12$

έχουμε $E_j(t, x_j) = 1 + \frac{(tx_j)^{10}}{10!}$. Επομένως η εκθετική γεννήτρια διατάξεων είναι

$$E(t) = E_0(t,1)E_1(t,1)\ldots E_{12}(t,1) = (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6})\left(1 + \frac{t^{10}}{10!}\right)^{12}.$$

Αναπτύσσοντας με τον τύπο του διωνύμου έχουμε

$$\begin{aligned} E(t) &= (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6})\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\frac{t^{10k}}{(10!)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\frac{t^{10k}}{(10!)^k} + \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\frac{t^{10k}+1}{(10!)^k} + \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\frac{t^{10k+2}}{2(10!)^k} + \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\frac{t^{10k+3}}{6(10!)^k}. \end{aligned}$$

Ο συντελεστής του $t^{52} = t^{10\cdot 5+2}$ είναι $\binom{12}{5}\frac{1}{2(10!)^5}$. Συνεπώς, ο ζητούμενος αριθμός επαναληπτικών διατάξεων που είναι ο συντελεστής του $\frac{t^{52}}{52!}$ είναι $\binom{12}{5}\frac{52!}{2(10!)^5}$.