ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2013, Θέματα και λύσεις B

Θέμα 1. Θεωρούμε δύο σύνολα $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{20}\}$ και $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_{10}\}$ με 20 και 10 στοιχεία, αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι $A \cap B = \emptyset$, και θέτουμε $\Omega = A \cup B$. Να υπολογίσετε
(α) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 19 στοιχεία, 12 από τα οποία ανήκουν στο A (και τα υπόλοιπα 7 στο B).
(β) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν ακριβώς 12 στοιχεία από το A και περιττό αριθμό στοιχείων από το B.
(γ) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν οσαδήποτε στοιχεία από το A και ακριβώς 7 από το B.
(δ) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο από το A και τουλάχιστον ένα στοιχείο από το B.
(ε) τον αριθμό των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν ακριβώς 12 στοιχεία από το A και το πολύ 9 στοιχεία από το B.

Λύση: (α) Ένα υποσύνολο του Ω με ακριβώς 19 στοιχεία, 12 από τα οποία ανήκουν στο A και τα υπόλοιπα 7 στο B φτιάχνεται σε δυό στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε τα 12 από τα 20 στοιχεία του A που θα μπουν στο υποσύνολο με $\binom{20}{12}$ τρόπους και στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε τα 7 από τα 10 στοιχεία του B που θα μπούν στο υποσύνολο με $\binom{10}{7}$ τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{20}{12}\binom{10}{7}$ τέτοια υποσύνολα.

(β) Ένα υποσύνολο του Ω που περιέχει ακριβώς 12 στοιχεία από το A και περιττό αριθμό στοιχείων από το B φτιάχνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε τα 12 από τα 20 στοιχεία του A που θα μπούν στο υποσύνολο με $\binom{20}{12}$ τρόπους και στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε ένα υποσύνολο του B με περιττό αριθμό στοιχείων για να μπουν στο υποσύνολο με $\sum_{k \text{ περιττός}} \binom{10}{k}$ τρόπους . Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{20}{12}\left(\sum_{k \text{ περιττός}} \binom{10}{k}\right)$ τέτοια σύνολα. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\sum_{k \text{ άρτιος}} \binom{10}{k} + \sum_{k \text{ περιττός}} \binom{10}{k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10},$$

$$\sum_{k \text{ άρτιος}} \binom{10}{k} - \sum_{k \text{ περιττός}} \binom{10}{k} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} = 0,$$

οπότε λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $\sum_{k \text{ περιττός}} \binom{10}{k} = 2^9$. Επομένως, τελικά υπάρχουν συνολικά $\binom{20}{12}2^9$ τέτοια υποσύνολα.

(γ) Ένα υποσύνολο του Ω που περιέχει οσαδήποτε στοιχεία από το A και ακριβώς 7 στοιχεία από το B φτιάχνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σύνολο στοιχείων του A που θα μπουν στο υποσύνολο με 2^{20} τρόπους (όσα είναι δηλαδή τα δυνατά υποσύνολα του A) και στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε τα 7 από τα 10 στοιχεία του B που θα μπουν στο υποσύνολο με $\binom{10}{7}$ τρόπους . Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά $2^{20}\binom{10}{7}$ τέτοια υποσύνολα.

(δ) Το πλήθος των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο από το A και τουλάχιστον ένα στοιχείο από το B βρίσκεται υπολογίζοντας το πλήθος όλων των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία και αφαιρώντας το πλήθος των υποσυνόλων του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που προέρχονται όλα αποκλειστικά από το A ή αποκλειστικά από το B. Συνεπώς το πλήθος των υποσυνόλων αυτών είναι $\binom{20+10}{9} - \binom{10}{9} - \binom{20}{9} = \binom{30}{9} - \binom{10}{9} - \binom{20}{9}$.

(ε) Ένα υποσύνολο του Ω που περιέχει ακριβώς 12 στοιχεία από το A και το πολύ 9 στοιχεία από το B φτιάχνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε τα 12 από τα 20 στοιχεία του A που θα μπούν στο υποσύνολο με $\binom{20}{12}$ τρόπους και στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε ένα υποσύνολο του B με το πολύ 9 στοιχεία για να μπουν στο υποσύνολο με $\sum_{k=0}^{9}\binom{10}{k} = 2^{10} - 1$ τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{20}{12}(2^{10} - 1)$ τέτοια σύνολα.

Θέμα 2. (α) Να βρείτε το πλήθος των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων $(x_1, \ldots, x_9)$ του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) &= 12\\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) &= 7.\end{aligned}$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων λύσεων $(x_1, \ldots, x_7)$ της εξίσωσης

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_5 + x_6 + x_7) = 49$$

με τους περιορισμούς $0 \leq x_i \leq 8$, $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Λύση: (α) Αν θέσουμε $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x$ και $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = y$, βλέπουμε ότι $x + y = 7$ και $xy = 12$, οπότε αναγκαστικά θα έχουμε $x = 3, y = 4$ ή $x = 4, y = 3$. Συνεπώς, κάθε λύση $(x_1, \ldots, x_9)$ του αρχικού συστήματος είναι λύση του συστήματος $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 4$ ή λύση του συστήματος $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 3$ και αντίστροφα. Το σύστημα $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 4$ έχει $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$ μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις λόγω της πολλαπλασιαστικής αρχής και ομοίως το σύστημα $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 3$ έχει $\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την αρχή του αθροίσματος, έχουμε ότι το αρχικό σύστημα έχει συνολικά $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις.

(β) Αφού ενδιαφερόμαστε για ακέραιες λύσεις και μάλιστα μη-αρνητικές και ισχύει $49 = 7^2$, θα πρέπει να ισχύει είτε $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1 + x_5 + x_6 + x_7 = 49$, είτε $x_1+x_2+x_3+x_4 = 7, x_1+x_5+x_6+x_7 = 7$, είτε $x_1+x_2+x_3+x_4 = 49, x_1+x_5+x_6+x_7 = 1$. Από αυτές τις περιπτώσεις μόνο η $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, x_1 + x_5 + x_6 + x_7 = 7$ είναι δυνατή αφού λόγω των περιορισμών $0 \leq x_i \leq 8$, $i = 1, 2, \ldots, 7$, δεν είναι δυνατό το άθροισμα τεσσάρων μεταβλητών να κάνει 49. Άρα το ζητούμενο πλήθος ακεραίων λύσεων ταυτίζεται με το πλήθος των ακεραίων λύσεων του συστήματος $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, x_1 + x_5 + x_6 + x_7 = 7$, με τους περιορισμούς $0 \leq x_i \leq 8$, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Στην πραγματικότητα όμως το δεξιό μέλος των περιορισμών είναι περιττό ($x_i \leq 8$, $i = 1, 2, \ldots, 7$) αφού έτσι κι αλλιώς οι μεταβλητές είναι μη-αρνητικές και αθροίζουν στο 7. Τελικά, το ζητούμενο πλήθος ακεραίων λύσεων ταυτίζεται με το πλήθος των ακεραίων λύσεων του συστήματος $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, x_1 + x_5 + x_6 + x_7 = 7$, με τους περιορισμούς $0 \leq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Για κάθε δυνατή τιμή του x_1, $x_1 = k = 0, 1, \ldots, 7$ το σύστημα ανάγεται στο $x_2 + x_3 + x_4 = 7 - k, x_5 + x_6 + x_7 = 7 - k$, με τους περιορισμούς $0 \leq x_i$, $i = 2, 3, \ldots, 7$ που έχει $\begin{bmatrix} 3 \\ 7-k \end{bmatrix}^2$ λύσεις (φυσικά δεν υπάρχουν λύσεις με $x_1 = 8$). Συνεπώς, με επίκληση της αρχής του αθροίσματος έχουμε συνολικά $\sum_{k=0}^{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 7-k \end{bmatrix}^2$ λύσεις.

Θέμα 3. (α) Σε ένα αμφιθέατρο εξετάζονται ταυτόχρονα 120 διακεκριμένοι φοιτητές, οι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{40}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Α), οι $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{40}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Β) και οι $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{40}$ (οι οποίοι εξετάζονται σε θέματα της κατηγορίας Γ). Καθένας από αυτούς παραδίδει το γραπτό του και τότε καταγράφεται το όνομά του σε μία λίστα (διατεταγμένη 120-άδα). Με πόσους τρόπους γίνεται να σχηματιστεί η λίστα αυτή έτσι ώστε στις πρώτες 12 θέσεις της λίστας να περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένας φοιτητής από κάθε κατηγορία θεμάτων;

(β) Να υπολογίσετε των αριθμό των επαναληπτικών διατάξεων των 10 στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_9\}$ ανά 41, αν το ω_0 επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ 2 φορές ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία επιτρέπεται να εμφανίζονται 0 ή 10 φορές το καθένα.

Λύση: (α) Έστω Ω το σύνολο όλων των δυνατών 120-άδων φοιτητών, Α το σύνολο των δυνατών 120-άδων χωρίς να υπάρχουν φοιτητές της κατηγορίας Α στις πρώτες 12 θέσεις, Β το σύνολο των δυνατών 120-άδων χωρίς να υπάρχουν φοιτητές της κατηγορίας Β στις πρώτες 12 θέσεις και Γ το σύνολο των δυνατών 120-άδων χωρίς να υπάρχουν φοιτητές της κατηγορίας Γ στις πρώτες 12 θέσεις. Τότε το ζητούμενο πλήθος τρόπων είναι $N(A'B'\Gamma')$ που από την αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού είναι ίσο με $N(\Omega) - N(A) - N(B) - N(\Gamma) + N(AB) + N(A\Gamma) + N(B\Gamma) - N(AB\Gamma)$. Έχουμε ότι $N(\Omega) = 120!$, αφού κάθε μετάθεση των φοιτητών είναι αποδεκτή 120-άδα του Ω. Επίσης $N(A) = (80)_{12}108!$, αφού μια 120-άδα που δεν περιλαμβάνει φοιτητές της κατηγορίας Α στις πρώτες 12 θέσεις φτιάχνεται σε 2 στάδια: Πρώτα επιλέγουμε 12 από τους 80 φοιτητές των κατηγοριών Β και Γ για τις πρώτες 12 θέσεις και τους βάζουμε στη σειρά με $(80)_{12}$ τρόπους και κατόπιν βάζουμε τους υπόλοιπους 108 φοιτητές στη σειρά. Ομοίως βρίσκουμε $N(B) = N(\Gamma) = (80)_{12}108!$. Με ανάλογο σκεπτικό έχουμε $N(AB) = N(A\Gamma) = N(B\Gamma) = (40)_{12}108!$, ενώ $N(AB\Gamma) = 0$. Τελικά το πλήθος των τρόπων για να σχηματιστεί η λίστα (120-άδα) των φοιτητών ώστε στις πρώτες 12 θέσεις να περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένας φοιτητής από κάθε κατηγορία είναι $120! - 3(80)_{12}108! + 3(40)_{12}108!$.

(β) Χρησιμοποιούμε γεννήτριες διατάξεων. Η εκθετική απαριθμήτρια του στοιχείου ω_0 είναι $E_0(t,x_0) = 1 + \frac{tx_0}{1!} + \frac{(tx_0)^2}{2!}$ ενώ για τα στοιχεία ω_j, $j = 1,2,\ldots 9$ έχουμε $E_j(t,x_j) = 1 + \frac{(tx_j)^{10}}{10!}$. Επομένως η εκθετική γεννήτρια διατάξεων είναι

$$E(t) = E_0(t,1)E_1(t,1)\ldots E_9(t,1) = (1+t+\frac{t^2}{2})\left(1+\frac{t^{10}}{10!}\right)^9.$$

Αναπτύσσοντας με τον τύπο του διωνύμου έχουμε

$$\begin{aligned} E(t) &= (1+t+\frac{t^2}{2})\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\frac{t^{10k}}{(10!)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\frac{t^{10k}}{(10!)^k} + \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\frac{t^{10k+1}}{(10!)^k} + \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\frac{t^{10k+2}}{2(10!)^k}. \end{aligned}$$

Ο συντελεστής του $t^{41} = t^{10\cdot 4+1}$ είναι $\binom{9}{4}\frac{1}{(10!)^4}$. Συνεπώς, ο ζητούμενος αριθμός επαναληπτικών διατάξεων που είναι ο συντελεστής του $\frac{t^{41}}{41!}$ είναι $\binom{9}{4}\frac{41!}{(10!)^4}$.