ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013 B

Θέμα 1. 20 θεατές άφησαν τα 40 διακεκριμένα παπούτσια τους (ένα δεξιό, ένα αριστερό ο καθένας) στον προθάλαμο του θεάτρου. Κλέφτης, στα σκοτεινά, άρπαξε 14 παπούτσια και τα έβαλε σε ένα σακί. Με πόσους τρόπους γίνεται η κλοπή (δηλαδή πόσες διαφορετικές συνθέσεις σακιών είναι δυνατές) σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Αν το σακί δεν περιέχει παπούτσια του ίδιου θεατή.

(β) Αν το σακί περιέχει ακριβώς 5 δεξιά παπούτσια.

(γ) Αν το σακί περιέχει ακριβώς 5 δεξιά παπούτσια και δεν περιέχει παπούτσια του ίδιου θεατή.

(δ) Αν το σακί περιέχει είτε και τα δυό είτε κανένα παπούτσι από κάθε ζευγάρι παπουτσιών θεατή.

(ε) Αν το σακί περιέχει τουλάχιστον ένα δεξί και τουλάχιστον ένα αριστερό παπούτσι.

Θέμα 2. (α) Να υπολογίσετε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 8. \end{aligned}$$

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_4 + x_5) = 33$.

Θέμα 3. (α) Έστω $\Sigma(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των $\nu + 2$ στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \ldots, \nu + 2\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $\nu + 1, \nu + 2$ πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά το καθένα, ενώ τα στοιχεία $1, 2, \ldots, \nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται όσες φορές θέλουν. Να υπολογίσετε την συνήθη γεννήτρια, $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Sigma(\nu, \kappa) t^{\kappa}$, καθώς και τον αριθμό $\Sigma(\nu, \kappa)$.

(β) Έστω $\Delta(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των $\nu + 2$ στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \ldots, \nu + 2\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $\nu + 1, \nu + 2$ πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά το καθένα, ενώ τα στοιχεία $1, 2, \ldots, \nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται όσες φορές θέλουν. Να υπολογίσετε την εκθετική γεννήτρια, $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Delta(\nu, \kappa) \frac{t^{\kappa}}{\kappa!}$, καθώς και τον αριθμό $\Delta(\nu, \kappa)$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις Θεμάτων Συνδυαστικής Ι εξ αναβολής Σεπτ. 2013

Ομάδα Θεμάτων Β.

Θέμα 1ο:

(α) Πολλαπλασιαστική αρχή:

$$\binom{20}{14}\cdot 2^{14}$$

\# επιλογών θεατών με 1 παπούτσι στο σακί

δεξί ή αριστερό για τον 1ο, 2ο, ..., 14ο

(β) Πολλαπλασιαστική αρχή:

$$\binom{20}{5}\binom{20}{9}$$

\# επιλογών δεξιών παπουτσιών στο σακί

\# επιλογών αριστερών παπουτσιών στο σακί

(γ) Όπως στο (β):

$$\binom{20}{5}\binom{15}{5}$$

Αφαιρούνται από τις δυνατές επιλογές τα αριστερά παπούτσια που το αντίστοιχο δεξί τους επιλέχθει για το σακί.

(δ) Αρκεί να διαλέξω 4 θεατές των οποίων θα μπουν και τα δύο παπούτσια: $\binom{20}{4}$

(ε) Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού:

Ω: Σύνολο επιλογών, A: Σύνολο επιλογών χωρίς δεξί παπ, B: Σύνολο... χωρίς αριστ

$$N(A'B') = N(\Omega) - N(A) - N(B) + N(AB) = \binom{40}{14} - \binom{20}{14} - \binom{20}{14} + 0$$

$$= \binom{40}{14} - 2\binom{20}{14}.$$

Θέμα 2ο:

(α) $$\left\{\begin{matrix} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14 \\ x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1+x_2+x_3 = 11 \\ x_4+x_5 = 3 \end{matrix}\right\}$$

Πολλαπλασιαστική αρχή: \# λύσεων $= \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{11}\cdot\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{3}$.

(β) $(x_1+x_2+x_3)(x_4+x_5)=33$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_4+x_5=33 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_4+x_5=11 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x_1+x_2+x_3=11 \\ x_4+x_5=3 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x_1+x_2+x_3=33 \\ x_4+x_5=1 \end{matrix}\right\}$$

Αρχή αθροίσματος + Πολλαπλασιαστική αρχή:

\# λύσεων $= \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{1}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{33} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{3}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{11} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{11}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{3} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{33}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{1}$.

Θέμα 3ο :

(α) $A(t) = (1+t+t^2+\dots)^{\nu}(t+t^2+t^3+\dots)^2 = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\nu}\left(\frac{t}{1-t}\right)^2$

$= t^2(1-t)^{-(\nu+2)}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Sigma(\nu,k)t^k = A(t) = t^2(1-t)^{-(\nu+2)} = t^2\sum_{j=0}^{\infty}\left[{\nu+2 \atop j}\right]t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\left[{\nu+2 \atop j}\right]t^{j+2}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\left[{\nu+2 \atop k-2}\right]t^k$$

Άρα

$$\Sigma(\nu,k) = \begin{cases} 0, & k=0,1 \\ \left[{\nu+2 \atop k-2}\right], & k=2,3,4,\dots \end{cases}$$

(β) $E(t) = \left(\frac{t^0}{0!}+\frac{t^1}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots\right)^{\nu}\left(\frac{t^1}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\dots\right)^2 = (e^t)^{\nu}(e^t-1)^2$

$= e^{\nu t}(e^{2t}-2e^t+1) = e^{(\nu+2)t} - 2e^{(\nu+1)t} + e^{\nu t}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta(\nu,k)\,t^k/k! = E(t) = e^{(\nu+2)t} - 2e^{(\nu+1)t} + e^{\nu t}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{((\nu+2)t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((\nu+1)t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left((\nu+2)^k - 2(\nu+1)^k + \nu^k\right)\frac{t^k}{k!}$$

Άρα

$\Delta(\nu,k) = (\nu+2)^k - 2(\nu+1)^k + \nu^k, \quad k=0,1,\dots$