Συνδυαστική - Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ
Τελική εξέταση Χειμερινού εξαμήνου 2023-2024

Θέμα 1ο: 20 διακεκριμένα κορίτσια και 10 διακεκριμένα αγόρια μπαίνουν σε μία σειρά. Με πόσους τρόπους γίνεται αυτό σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) αν όλα τα αγόρια κάθονται σε συνεχόμενες θέσεις;
β) αν στις πρώτες 5 θέσεις κάθονται μόνο κορίτσια;
γ) αν δεν υπάρχουν διαδοχικά αγόρια (δηλαδή κανένα αγόρι δεν έχει δίπλα του αγόρι);
δ) χωρίς περιορισμό;

Θέμα 2ο: Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k+1}{k+2}\binom{n}{k}.$$

Θέμα 3ο: Ρίχνουμε 20 φορές ένα ζάρι. Να υπολογιστούν

α) το πλήθος των αποτελεσμάτων (δηλαδή των διατεταγμένων εικοσάδων ζαριών) στα οποία εμφανίζονται όλοι οι άρτιοι αριθμοί (δηλαδή οι 2,4,6) από τουλάχιστον μία φορά ο καθένας,
β) η πιθανότητα να εμφανιστούν όλοι οι άρτιοι αριθμοί (δηλαδή οι 2,4,6) από τουλάχιστον μία φορά ο καθένας.

Θέμα 4ο: Να υπολογιστεί η συνήθης γεννήτρια $A_n(t)$ των επαναληπτικών συνδυασμών των $2n$ στοιχείων $\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots, \omega_{2n}$ ανά k, όταν τα στοιχεία $\omega_1, \ldots, \omega_n$ επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ 2 φορές το καθένα, ενώ τα στοιχεία $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_{2n}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται πολλαπλάσιο του τρία αριθμό φορών (0 ή 3 ή 6 ή ...) το καθένα. Στη συνέχεια, από τη γεννήτρια, να βρείτε τον αριθμό των εν λόγω συνδυασμών.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!

Λύσεις:

Θέμα 1ο

α) Μια τοποθέτηση στην οποία όλα τα αγόρια κάθονται σε συνεχόμενες θέσεις γίνεται σε 3 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή θέσης για "αρχικό" αγόρι από την 1η ως την 21η → 21 τρόποι

2ο στάδιο: Μετάθεση των 10 αγοριών στις 10 θέσεις που έχουν δεσμευτεί γι αυτά → 10! τρόποι

3ο στάδιο: Μετάθεση των 20 κοριτσιών στις υπόλοιπες θέσεις → 20! τρόποι

Άρα υπάρχουν συνολικά $21 \cdot 10! \cdot 20! = 10!\,21!$ τρόποι τοποθέτησης, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή.

β) Μια τοποθέτηση στην οποία στις πρώτες 5 θέσεις κάθονται μόνο κορίτσια γίνεται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή και τοποθέτηση 5 κοριτσιών στις 5 πρώτες θέσεις → $\frac{20!}{(20-5)!}$ τρ.

2ο στάδιο: Τοποθέτηση των υπόλοιπων ατόμων σε σειρά $(15+10=25$ ατόμων$)$ → $25!$ τρ.

Άρα, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά $\frac{20!}{15!} \cdot 25!$ τρόποι τοποθέτησης.

γ) Μια τοποθέτηση χωρίς διαδοχικά αγόρια γίνεται σε 3 στάδια:

$1^{\underline{o}}$ στάδιο: Τοποθέτηση των κοριτσιών σε σειρά $\to 20!$ τρ.

$2^{\underline{o}}$ στάδιο: Επιλογή θέσεων μεταξύ, πριν ή μετά τα κορίτσια για να μπουν τα αγόρια $\to \binom{21}{10}$ τρ

$3^{\underline{o}}$ στάδιο: Τοποθέτηση των αγοριών στις θέσεις που δεσμεύτηκαν $\to 10!$ τρ.

Άρα, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν $20!\binom{21}{10}\cdot 10! = 20!\,\frac{21!}{11!}$ τέτοιες τοποθετήσεις.

δ) Μια τοποθέτηση χωρίς περιορισμό γίνεται με $(20+10)! = 30!$ τρόπους.

Θέμα 2ο:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k+1}{k+2}\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(k-1+\frac{3}{k+2}\right)\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + 3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cancel{k}\,\frac{n}{\cancel{k}}\binom{n-1}{k-1} - 2^n + 3\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{(k+2)(k+1)}\binom{n}{k}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} - 2^n + \frac{3}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n+2}{k+2}$$

$$= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} - 2^n + \frac{3}{(n+2)(n+1)}\sum_{j=2}^{n+2}(j-1)\binom{n+2}{j}$$

$$= n\cdot 2^{n-1} - 2^n$$

$$+\frac{3}{(n+2)(n+1)}\left(\sum_{j=2}^{n+2} j\binom{n+2}{j} - \sum_{j=2}^{n+2}\binom{n+2}{j}\right)$$

$$= n\cdot 2^{n-1} - 2^n$$

$$+\frac{3}{(n+2)(n+1)}\left(\sum_{j=2}^{n+2} \cancel{j}\,\frac{n+2}{\cancel{j}}\binom{n+1}{j-1} - \sum_{j=2}^{n+2}\binom{n+2}{j}\right)$$

$$= n\cdot 2^{n-1} - 2^n + \frac{3}{n+1}\boxed{\sum_{j=2}^{n+2}\binom{n+1}{j-1}} \qquad \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$$

$$-\frac{3}{(n+2)(n+1)}\left(2^{n+2} - \binom{n+2}{1} - \binom{n+2}{0}\right)$$

$$= n\cdot 2^{n-1} - 2^n + \frac{3}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right) - \frac{3}{(n+2)(n+1)}\left(2^{n+2} - n - 2 - 1\right).$$

Θέμα 3ο:

α) Έστω

Ω: Σύνολο όλων των αποτελεσμάτων

A_1: Σύνολο αποτελ. που δεν εμφ. η ζαριά 2

A_2: Σύνολο αποτελ. που δεν εμφ. η ζαριά 4

A_3: Σύνολο αποτελ. που δεν εμφ. η ζαριά 6

Ζητάμε το $N(A_1' A_2' A_3')$.

Με βάση την αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού έχουμε:

$$N(A_1'A_2'A_3') = N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) + N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$$

Όμως

$N(\Omega) = 6^{20}$ (διατ. με επαν. 6 ανά 20)

$N(A_i) = 5^{20}$, $i = 1,2,3$

$N(A_iA_j) = 4^{20}$, $i \neq j$

$N(A_1A_2A_3) = 3^{20}$

οπότε

$$N(A_1'A_2'A_3') = 6^{20} - 3\cdot 5^{20} + 3\cdot 4^{20} - 3^{20}$$

β) Η πιθανότητα είναι

$$P = \frac{N(A_1'A_2'A_3')}{N(\Omega)} = \frac{6^{20} - 3\cdot 5^{20} + 3\cdot 4^{20} - 3^{20}}{6^{20}}.$$

Θέμα 4ο:

Οι απαριθμήτριες των στοιχείων ω_j, $j=1,2,\dots,2n$ είναι

$$A_j(t,x_j) = (tx_j)^0 + (tx_j)^1 + (tx_j)^2, \quad j=1,2,\dots,n$$
$$A_j(t,x_j) = (tx_j)^0 + (tx_j)^3 + (tx_j)^6 + \dots, \quad j=n+1,n+2,\dots,2n.$$

οπότε

$$A_j(t,1) = 1+t+t^2, \quad j=1,2,\dots,n$$
$$A_j(t,1) = \Sigma_{k=0}^{\infty} (t^3)^j = (1-t^3)^{-1}, \quad j=n+1,n+2,\dots,2n.$$

Επομένως η γεννήτρια των επαναληπτικών συνδυασμών είναι

$$A_n(t) = \prod_{j=1}^{2n} A_j(t,1) = (1+t+t^2)^n \left(\frac{1}{1-t^3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1+t+t^2}{1-t^3}\right)^n = \left(\frac{1}{1-t}\right)^n$$

Έστω $C(n,k)$ το πλήθος των συνδυασμών με τους συγκεκριμένους περιορισμούς.

Τότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)t^k = A_n(t) = (1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[{n \atop k}\right]}_{\binom{n+k-1}{k}} t^k .$$

Συνεπώς:

$$C(n,k) = \left[{n \atop k}\right] = \binom{n+k-1}{k}, \quad \begin{array}{l} n=1,2,\dots \\ k=0,1,\dots \end{array}$$