22 Οκτωβρίου 2007

Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι: Ασκήσεις 1

(Παράδοση: 29 Οκτωβρίου 2007)

1*.[1] Προσπαθείστε να αποδείξετε την ισότητα Parseval:
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$
Παρατηρείστε πρώτα ότι για τριγωνομετρικά πολυώνυμα, δηλ. συναρτήσεις της μορφής $f(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ η ισότητα είναι απλή εφαρμογή ιδιοτήτων της συνάρτησης $e_k(t) = e^{ikt}$. Πώς μπορεί κανείς να περάσει τώρα σε αυθαίρετες *συνεχείς* συναρτήσεις;

2*. Υπάρχει ακολουθία (f_n) συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε
(α) $\forall n\ \forall t,\ \ 0 \le f_n(t) \le 1$
(β) για κάθε t η $(f_n(t))_n$ είναι φθίνουσα (άρα συγκλίνει)
(γ) η συνάρτηση-όριο f δεν είναι καν Riemann ολοκληρώσιμη.

3*. Βρείτε μια συνεχή καμπύλη στο επίπεδο, με παραμετρική μορφή

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^2$$

(όπου οι $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχείς* συναρτήσεις) που δεν είναι ευθυγραμμίσιμη.

4. Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E$ πεπερασμένο ή $X \setminus E$ πεπερασμένο$\}$. Δείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα στο X. Εξετάστε αν είναι σ-άλγεβρα στο X. Τι συμβαίνει όταν $X = \mathbb{N}$;

5. Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E$ αριθμήσιμο ή $X \setminus E$ αριθμήσιμο$\}$. Δείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X.

6. Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια σ-άλγεβρα που έχει άπειρα στοιχεία. Δείξτε ότι:

(α) Η $\mathcal{M}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.

(β) Η $\mathcal{M}$ έχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία.

7. Έστω $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Δείξτε ότι

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcup \big\{\mathcal{M}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}\ ,\ \mathcal{F} \text{ αριθμήσιμο}\big\}.$$

[Υπόδειξη: Δείξτε ότι η οικογένεια στο δεξιό μέλος είναι σ-άλγεβρα.]

8. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $(E_n)_n$ είναι μια ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{M}$, ορίζουμε

$$\begin{aligned} \limsup E_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n, \\ \liminf E_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n. \end{aligned}$$

(α) Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \limsup E_n &= \{x \in X : x \in E_n \text{ για άπειρα } n\}, \\ \liminf E_n &= \{x \in X : x \in E_n \text{ για όλα εκτός από πεπερασμένα } n\}. \end{aligned}$$

(β) Δείξτε ότι $\mu(\liminf E_n) \le \liminf \mu(E_n)$. Επίσης, αν $\mu\big(\bigcup_n E_n\big) < \infty$, τότε $\mu(\limsup E_n) \ge \limsup \mu(E_n)$.

9. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $E, F \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

10. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου.

(α) Αν $E, F \in \mathcal{M}$ και $\mu(E \triangle F) = 0$, δείξτε ότι $\mu(E) = \mu(F)$.

(β) Λέμε ότι $E \sim F$ αν $\mu(E \triangle F) = 0$. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στη $\mathcal{M}$.

[1] Με * σημειώνονται προαιρετικές ασκήσεις

(γ) Αν $E, F \in \mathcal{M}$, ορίζουμε $\rho(E,F) = \mu(E \triangle F)$. Δείξτε ότι $\rho(E,G) \leq \rho(E,F) + \rho(F,G)$, άρα η ρ ορίζει μια μετρική στο χώρο $\mathcal{M}/\sim$ των κλάσεων ισοδυναμίας.

11. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, δείξτε ότι για κάθε $C > 0$ και για κάθε $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) = \infty$ υπάρχει $F \subset E$, $F \in \mathcal{M}$, με $C < \mu(F) < \infty$.

12. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, δείξτε ότι είναι ημιπεπερασμένο. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

13. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ορίζουμε μ_0 στη $\mathcal{M}$, θέτοντας

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E \text{ και } \mu(F) < \infty\}.$$

Δείξτε ότι

(α) Το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο μέτρο (το «ημιπεπερασμένο μέρος» του μ).

(β) Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $\mu_0 = \mu$.

(γ) Υπάρχει μέτρο ν στη $\mathcal{M}$ που παίρνει μόνο τις τιμές 0 και ∞, τέτοιο ώστε $\mu = \mu_0 + \nu$.