21 Δεκεμβρίου 2007

Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι: Ασκήσεις 4

(Παράδοση: 9 Ιανουαρίου 2008)

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int f(x)\cos(nx)dm(x)\to 0 \quad \text{όταν} \quad n\to\infty.$$

[*Υπόδειξη:* Δείξτε το πρώτα στην περίπτωση που $f=\chi_J$ για τυχόν διάστημα $J=[a,b]$.]

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\int f(x)dm(x)=\int f(x+t)dm(x)$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

(β) Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0}\int \big|g(x)\cdot[f(x)-f(x+t)]\big|dm(x)=0.$$

[*Υπόδειξη:* Δείξτε το πρώτα στην περίπτωση που η f είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[-A,A]$, όπου $A>0$.]

(γ) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0}\int \big|f(x)-f(x+t)\big|dm(x)=0.$$

3. Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ ένας σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $g:X\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $f\in L^1(\mu)$ ισχύει $f\cdot g\in L^1(\mu)$. Δείξτε ότι η g είναι «ουσιωδώς φραγμένη», δηλ. ότι υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιος ώστε

$$\mu(\{x\in X:|g(x)|>\alpha\})=0.$$

4. Έστω $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $g(x,y)=f(x)-f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1)\times(0,1)$, δείξτε ότι $f\in L^1(0,1)$.

5. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και f,g μη αρνητικές Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο E. Δείξτε ότι

$$\int_E f\cdot g\,dm=\int_0^{+\infty}\left(\int_{\{x\in E:g(x)\geq y\}}f(x)dm(x)\right)dm(y).$$

6. Έστω $(X,\mathcal{S},\mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $f\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$. Αν $\nu(E)=\int_E fd\mu$, δείξτε ότι ένα $E\in\mathcal{S}$ είναι ν-θετικό (αντ. ν-αρνητικό, ν-μηδενικό) αν και μόνον αν η $f|_E$ είναι μ-σ.π. θετική (αντ. αρνητική, μηδέν). Δώστε παράδειγμα συνόλου $E\in\mathcal{S}$ ώστε $\nu(E)=0$ αλλά το E δεν είναι ν-μηδενικό.

7. Αν $(X,\mathcal{S},\mu)$ είναι χώρος μέτρου, $f\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$ και $\nu(E)=\int_E fd\mu$, τότε $\nu_+(E)=\int_E f_+d\mu$ και $\nu_-(E)=\int_E f_-d\mu$ (επομένως $|\nu|(E)=\int_E|f|d\mu$).

8. Αν ν είναι προσημασμένο μέτρο στον $(X,\mathcal{S})$ και $E\in\mathcal{S}$, τότε

$$\nu_+(E)=\sup\{\nu(F):F\in\mathcal{S},F\subseteq E\} \qquad \text{και} \qquad \nu_-(E)=-\inf\{\nu(F):F\in\mathcal{S},F\subseteq E\}.$$

Επίσης

$$|\nu|(E)=\sup\{\sum_{k=1}^n|\nu(E_k)|:E_k\in\mathcal{S}\text{ ξένα, }\bigcup_{k=1}^n E_k=E\}=\sup\{\sum_{k=1}^\infty|\nu(F_k)|:F_k\in\mathcal{S}\text{ ξένα, }\bigcup_{k=1}^\infty E_k=E\}$$

και το $|\nu|$ είναι το μικρότερο θετικό μέτρο μ στον $(X,\mathcal{S})$ με την ιδιότητα $\mu(E)\geq|\nu(E)|$ για κάθε $E\in\mathcal{S}$.

9. Αν ν,μ είναι προσημασμένα μέτρα στον $(X,\mathcal{S})$, τότε

(α) Ένα σύνολο $E\in\mathcal{S}$ είναι ν-μηδενικό αν και μόνον αν $|\nu|(E)=0$.

(β) $\nu\perp\mu\Leftrightarrow|\nu|\perp\mu\Leftrightarrow(\nu_+\perp\mu$ και $\nu_-\perp\mu)$.

Ορισμός 1 *Έστω ν προσημασμένο ή θετικό μέτρο και μ θετικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{S})$. Το ν λέγεται* ***απόλυτα συνεχές*** *ως προς μ (γράφουμε $\nu \ll \mu$) αν*

$$E \in \mathcal{S},\ \mu(E) = 0 \ \Rightarrow\ \nu(E) = 0.$$

Δύο θετικά μέτρα μ και ν λέγονται ***ισοδύναμα*** *αν $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$.*

10. $\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu \Leftrightarrow (\nu_+ \ll \mu$ και $\nu_- \ll \mu)$.

11. Αν $\nu \ll \mu$ και $\nu \perp \mu$ τότε $\nu = 0$.

12. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα (θετικά) μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:[1]

1. Το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ και το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν.
2. Τα μ και ν έχουν τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου.
3. Υπάρχει $g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη με $0 < g(x) < \infty$ για κάθε $x \in X$, τέτοια ώστε $\nu(A) = \int_A g d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{M}$.

13. Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Δείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο μέτρο ν στον $(X, \mathcal{M})$ τέτοιο ώστε: το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν και το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ.

14. Έστω μ, ν δύο πεπερασμένα θετικά μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$ με $\nu \ll \mu$. Ορίζουμε $\lambda = \mu + \nu$. Αν $f = d\nu/d\lambda$, δείξτε ότι $0 \leq f < 1$ σχεδόν παντού ως προς το μ, και

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}.$$

15. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου, $\mathcal{N}$ μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{M}$, και $\nu = \mu|_{\mathcal{N}}$. Δείξτε ότι αν $f \in L^1(\mu)$, τότε υπάρχει $g \in L^1(\nu)$ τέτοια ώστε

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$$

για κάθε $E \in \mathcal{N}$. Δείξτε επίσης ότι αν g' είναι μια άλλη τέτοια συνάρτηση, τότε $g' = g$ σχεδόν παντού ως προς το ν. (Η g είναι η «δεσμευμένη μέση τιμή» της f στην $\mathcal{N}$.)

Να επιλέξετε τουλάχιστον 7 από τις ασκήσεις

[1] Θεωρείστε γνωστό το Θεώρημα Radon-Nikodym για σ-πεπερασμένα (θετικά) μέτρα