Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι
Πρόχειρη Περίληψη Σημειώσεων

Α. Κ.

0 Εισαγωγικά

Ξεκινάμε[1] παραθέτοντας, χωρίς απαιτήσεις πληρότητας ή ιδιαίτερης μαθηματικής αυστηρότητας, μερικά προβλήματα της Κλασικής Ανάλυσης που οδηγούν στην αναγκαιότητα της αναθεώρησης της έννοιας της ολοκλήρωσης, του εμβαδού, του μήκους, δηλαδή ουσιαστικά στο πρόβλημα του μέτρου.

1. Σειρές Fourier – Πλήρωση
2. Εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος
3. Μήκος τόξου – Ευθυγραμμίσιμες καμπύλες
4. Ολοκλήρωση και διαφόριση: Το Θεμελιώδες Θεώρημα
5. Το πρόβλημα του Μέτρου

0.1 Σειρές Fourier – Πλήρωση

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-ολοκληρώσιμη συνάρτηση (γράφουμε: $f \in \mathcal{R}$).
Στην f αντιστοιχεί η *τυπική σειρά Fourier*:

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int} \tag{1}$$

(δηλ. η ακολουθία $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ των συντελεστών Fourier), όπου

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

Είναι γνωστό ότι ισχύει η ισότητα

$$\text{Parseval} \ : \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt. \tag{3}$$

Δηλαδή η απεικόνιση

$$\mathcal{R} \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \to (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

[1] intro, 18/10/07

διατηρεί την «μέση τετραγωνική απόσταση».

Όμως η απεικόνιση αυτή δεν είναι επί. Δηλαδή υπάρχει $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ που δεν είναι ακολουθία συντελεστών Fourier καμμιάς $f \in \mathcal{R}$.

Εφόσον είναι γνωστό ότι ο χώρος $(\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2)$ είναι *πλήρης* ως προς την μετρική $\|(a_n) - (b_n)\|_2 \equiv \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n - b_n|^2\right)^{1/2}$, έπεται ειδικότερα ότι ο $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{L^2})$ *δεν είναι πλήρης* ως προς την ψευδομετρική $\|f-g\|_{L^2} \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-g(t)|^2\right)^{1/2}$.

Προκύπτουν δύο ερωτήματα:

- Τι είδους «συναρτήσεις» εμφανίζονται όταν θεωρήσουμε την πλήρωση του $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{L^2})$;
- Πώς μπορούμε να ολοκληρώσουμε αυτές τις «συναρτήσεις»; Ισχύει γι΄ αυτές η ισότητα Parseval;

0.2 Εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος

Έστω (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$ το όριο $\lim_n f_n(t)$ υπάρχει (στο $\mathbb{R}$), οπότε ορίζει μια συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Τι είδους συναρτήσεις προκύπτουν από μια τέτοια διαδικασία;

Αν η σύγκλιση της (f_n) είναι *ομοιόμορφη* στο $[0,1]$, τότε η κατάσταση είναι η καλύτερη δυνατή: η συνάρτηση-όριο f είναι *συνεχής*.

Αν όμως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, το όριο μπορεί να κρύβει εκπλήξεις:

Υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) ώστε

(α) $\forall n\ \forall t,\ \ 0 \le f_n(t) \le 1$
(β) για κάθε t η $(f_n(t))_n$ είναι φθίνουσα (άρα συγκλίνει)
(γ) η συνάρτηση-όριο f δεν είναι καν Riemann ολοκληρώσιμη.

Παρατηρούμε όμως ότι από τα (α) και (β) προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το ολοκλήρωμα $I_n = \int_0^1 f_n$ υπάρχει, και ότι η ακολουθία (I_n) είναι φθίνουσα και μη αρνητική, άρα το όριο

$$\lim_n \int_0^1 f_n$$

υπάρχει, ενώ το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \lim_n f_n$$

ούτε καν ορίζεται.

Πρόβλημα Ποιά «μέθοδος ολοκλήρωσης» μπορεί να εξασφαλίσει την ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων όπως η $\lim_n f_n$; Υπό ποιές προϋποθέσεις εξασφαλίζεται επιπλέον η ισότητα

$$\lim_n \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_n f_n \quad ;$$

0.3 Μήκος τόξου – Ευθυγραμμίσιμες καμπύλες

Θεωρούμε μια συνεχή καμπύλη στο επίπεδο, με παραμετρική μορφή

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$$

όπου οι $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχείς* συναρτήσεις.

Προσεγγίζουμε την γ από μια οικογένεια $\{\gamma_{\mathcal{P}}\}$ *πολυγωνικών καμπύλων*: Η $\gamma_{\mathcal{P}}$ ορίζεται από μια διαμέριση $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ του $[a, b]$ και είναι η πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία

$$(x(a), y(a)), (x(t_1), y(t_1)), \ldots, (x(b), y(b))$$

της γ. Το μήκος της $\gamma_{\mathcal{P}}$ είναι βεβαίως

$$\ell(\gamma_{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{n} |(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2|^{1/2}.$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε

$$\ell(\gamma) \equiv \sup\{\ell(\gamma_{\mathcal{P}}) : \mathcal{P} \text{ διαμερ. του } [a, b]\} \in [0, +\infty]$$

και να ονομάζουμε την γ *ευθυγραμμίσιμη* όταν $\ell(\gamma) < +\infty$.

Κατ΄ αρχάς παρατηρούμε ότι η συνέχεια των x και y δεν είναι αρκετή για να εξασφαλίσει ότι $\ell(\gamma) < +\infty$ (Παράδειγμα;)

Είναι γνωστό ότι όταν οι x και y είναι (έστω κατά τμήματα) συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε η γ είναι ευθυγραμμίσιμη και μάλιστα

$$\ell(\gamma) = \int_a^b (|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2)^{1/2} dt. \tag{4}$$

Πρόβλημα 1 Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες στις x και y ώστε η γ να είναι ευθυγραμμίσιμη.

Πρόβλημα 2 Όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες αυτές, έχει έννοια το ολοκλήρωμα στην (4); Και αν ναι, ισχύει η ισότητα;

Η απάντηση στο πρώτο πρόβλημα δίνεται από την έννοια της «συνάρτησης φραγμένης κύμανσης». Όταν οι x και y είναι φραγμένης κύμανσης, το ολοκλήρωμα στην (4) μπορεί να ορισθεί με κατάλληλη «μέθοδο ολοκλήρωσης». Η ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα. Μπορεί να επιτευχθεί με «αλλαγή παραμετρικής μορφής»: Αν η γ είναι ευθυγραμμίσιμη, υπάρχουν συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης x_1 και y_1 ώστε

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\} = \{(x_1(t), y_1(t)) : t \in [a, b]\}$$

$$\text{και} \quad \ell(\gamma) = \int_a^b (|x_1'(t)|^2 + |y_1'(t)|^2)^{1/2} dt.$$

0.4 Ολοκλήρωση και διαφόριση: Το Θεμελιώδες Θεώρημα

Ας γράψουμε τις δύο μορφές του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού (για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής):

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \tag{6}$$

Ερώτημα Για ποιές συναρτήσεις F ισχύει η (5);

Αν η F' είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η (5) ισχύει.

Όμως υπάρχουν παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων που δεν έχουν παράγωγο σε *κανένα* σημείο του $[a,b]$.

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν παραδείγματα διαφορίσιμων συναρτήσεων $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ που η F' δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Οι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει η (5) είναι οι λεγόμενες «απόλυτα συνεχείς» συναρτήσεις.

Επίσης, αν η f είναι «L^1-συνάρτηση» τότε (με την κατάλληλη «μέθοδο ολοκλήρωσης»), η (6) ισχύει «σχεδόν παντού».

0.5 Το πρόβλημα του Μέτρου

Η αντιμετώπιση όλων των προηγουμένων προβλημάτων οδηγεί στο λεγόμενο «πρόβλημα του μέτρου». Μια μορφή του είναι η ακόλουθη:

Πώς μπορεί κανείς να ορίσει τον «όγκο» των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, με τρόπο που να επεκτείνει τη γνωστή γεωμετρική έννοια του όγκου παραλληλεπιπέδου;

Θέλουμε δηλαδή να ορίσουμε μια απεικόνιση

$$m_d:\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\to[0,+\infty] \qquad (\mathcal{P}\text{: το δυναμοσύνολο})$$

με τις ιδιότητες (περιοριζόμαστε στην περίπτωση $d=2$ για απλότητα)

$$\begin{array}{lll}
(a) & m_2([0,a]\times[0,b]) & = a\cdot b \quad \text{όταν } \ a,b\geq 0 \\
(b) & m_2\left(\bigcup_n E_n\right) & = \sum_n m_2(E_n) \quad \text{όταν τα } E_n \text{ είναι ξένα ανά δυο} \\
(c) & m_2(E+x) & = m_2(E) \quad \text{για κάθε } \ x\in\mathbb{R}^2 \ \text{ και} \\
 & m_2(T(E)) & = m_2(E) \quad \text{για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό } T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2.
\end{array}$$

Παρατήρηση Ειδική περίπτωση της ιδιότητας (b) (που λέγεται *αριθμήσιμη προσθετικότητα*) είναι η ακόλουθη *πεπερασμένη προσθετικότητα*:

$$(b')\ m_d(E_1\cup E_2)=m_d(E_1)+m_d(E_2) \quad \text{όταν } E_1\cap E_2=\emptyset.$$

Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η (b) είναι αναγκαία για να αντιμετωπισθούν οριακές διαδικασίες (π.χ. εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος, διαφόριση αορίστου ολοκληρώματος κ.λπ.)· η (b') δεν αρκεί.

Όμως,

> *Δεν υπάρχει συνάρτηση $m_d:\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\to[0,+\infty]$ που ικανοποιεί τα $(a),(b),(c)$, ακόμα και στην περίπτωση $d=1$!*

Για ευκολία του γράφοντος, θα δώσουμε την *απόδειξη του ισχυρισμού*, αντί για την ευθεία $\mathbb{R}$, στην μοναδιαία περιφέρεια

$$S^1=\{e^{i2\pi t}:t\in[0,1)\}$$

στο μιγαδικό επίπεδο. Η (a) τότε γίνεται: το μήκος ενός τόξου $T=\{e^{i2\pi t}:t\in[0,b)\}$ είναι $m_1(T)=2\pi b$.

Έστω $\{q_1, q_2, \ldots\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα $F \subseteq S^1$ που οι «στροφές» $F_n = e^{i2\pi q_n} F$ του F κατά q_n διαμερίζουν την S^1 σε ξένα ανά δύο σύνολα:

$$S^1 = \bigcup_n F_n = \bigcup_n e^{i2\pi q_n} F, \qquad F_n \cap F_m = \emptyset \text{ όταν } n \neq m. \tag{7}$$

Αν υπάρχει τέτοιο σύνολο, τότε η συνάρτηση m_1 αποκλείεται να ορίζεται στο σύνολο αυτό. Γιατί αν οριζόταν, τότε από την (c) θα είχαμε $m_1(F_n) = m_1(F)$ για κάθε n, οπότε, αν μεν $m_1(F) > 0$ τότε $m_1(S^1) = +\infty$ από την (b) λόγω της (7), και αν $m_1(F) = 0$ τότε $m_1(S^1) = 0$ πάλι από την (b). Και οι δύο αυτές εκδοχές έρχονται σε αντίθεση με την (a).

Δείχνουμε ότι τέτοιο σύνολο F υπάρχει:

Ορίζουμε $e^{i2\pi t} \sim e^{i2\pi s}$ αν $e^{i2\pi(t-s)} = e^{i2\pi q}$ για κάποιο $q \in \mathbb{Q}$. Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην S^1, άρα διαμερίζει την S^1 σε κλάσεις ισοδυναμίας. Χρησιμοποιώντας το Αξίωμα της Επιλογής (!), επιλέγουμε έναν και μόνον έναν αντιπρόσωπο $e^{i2\pi t}$ από κάθε κλάση ισοδυναμίας, και ονομάζουμε $F \subseteq S^1$ το σύνολο όλων αυτών των αντιπροσώπων. Θα δείξουμε ότι το F ικανοποιεί την (7).

Αν $p \neq q$ είναι ρητοί στο $[0,1)$, τα σύνολα $e^{i2\pi p}F = \{e^{i2\pi(p+t)} : e^{i2\pi t} \in F\}$ και $e^{i2\pi q}F$ είναι ξένα γιατί αν $e^{i2\pi(p+t)} = e^{i2\pi(q+s)}$ τότε $e^{i2\pi(t-s)} = e^{i2\pi(q-p)}$, οπότε τα $e^{i2\pi t}$ και $e^{i2\pi s}$ θα ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, αντίθετα με την επιλογή του F. Επίσης,

$$S^1 = \bigcup_n e^{i2\pi q_n} F$$

γιατί κάθε $e^{i2\pi t} \in S^1$ ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας, οπότε είναι ισοδύναμο με κάποιο $e^{i2\pi s} \in F$, δηλαδή υπάρχει q_n ώστε $e^{i2\pi(t-s)} = e^{i2\pi q_n}$, άρα $e^{i2\pi t} \in e^{i2\pi q_n} F$. $\square$

Τίθεται το ερώτημα, αν είναι δυνατόν να ορισθεί απεικόνιση $m_d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$ που να ικανοποιεί τις $(a), (b')$ και (c), να είναι δηλαδή μόνον πεπερασμένα προσθετική.

Το ακόλουθο εντυπωσιακό αποτέλεσμα, γνωστό ως «παράδοξο των Banach - Tarski», δείχνει ότι ούτε τέτοια συνάρτηση υπάρχει, όταν $d \geq 3$:

> *Αν $d \geq 3$ και U, V είναι οποιαδήποτε ανοικτά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε*
>
> $$\begin{aligned} U =& E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \\ V =& F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n \end{aligned}$$
>
> *όπου τα E_k είναι ξένα ανά δύο, τα F_k είναι ξένα ανά δύο, και $E_k \simeq F_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δηλαδή υπάρχουν ορθογώνιοι $d \times d$ πίνακες T_k και $x_k \in \mathbb{R}^d$ ώστε $F_k = T_k(E_k) + x_k$, $k = 1, \ldots, n$.*

Αν λοιπόν οριζόταν μια τέτοια συνάρτηση «όγκος» m_d σε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τότε όλα τα ανοικτά και φραγμένα σύνολα θα είχαν τον ίδιο «όγκο»: θα μπορούσαμε να «κόψουμε» το U σε πεπερασμένο πλήθος κομματιών $E_1 \ldots E_n$ και, μετά από μεταθέσεις και στροφές, να φτιάξουμε το V.

Συμπέρασμα Αν θέλουμε να διατηρήσουμε τις ιδιότητες $(a), (b)$ και (c), είμαστε υποχρεωμένοι *να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της m_d*, την κλάση δηλαδή των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ που μπορούν να «μετρηθούν».