3 Ολοκλήρωση

3.1 Μετρήσιμες Συναρτήσεις

Παρατηρήσεις 3.1 **(α)** Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ μεταξύ μη κενών συνόλων επάγει μια απεικόνιση

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X) : \; B \to f^{-1}(B) \equiv \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Η απεικόνιση αυτή διατηρεί συμπληρώματα, αυθαίρετες ενώσεις και αυθαίρετες τομές.

(β) Αν $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ είναι σ-άλγεβρα, η οικογένεια

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \equiv \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.

Ορισμός 3.1 *Αν $(X\mathcal{A})$ και $(Y,\mathcal{B})$ είναι μετρήσιμοι χώροι, μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Παρατηρήσεις 3.2 **(α)** Η σύνθεση μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη: Αν

$$(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{B}) \xrightarrow{g} (Z,\mathcal{C})$$

όπου η f είναι $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη και η g είναι $(\mathcal{B},\mathcal{C})$-μετρήσιμη, τότε η $g \circ f$ είναι $(\mathcal{A},\mathcal{C})$-μετρήσιμη.

(β) Για να ελέγξω αν μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη, αρκεί να ελέγξω αν η σχέση $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ ισχύει για κάθε $E \in \mathcal{E}$, όπου $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ μια οικογένεια που παράγει την $\mathcal{B}$, δηλαδή τέτοια ώστε $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$.

(γ) Έπεται από το (β) ότι αν οι X και Y είναι τοπολογικοί (ή μετρικοί) χώροι, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-μετρήσιμη.

Ορισμός 3.2 *Αν $(X,\mathcal{M})$ είναι μετρήσιμος χώρος και Y είναι τοπολογικός ή μετρικός χώρος, μια $f : X \to Y$ λέγεται $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M},\mathcal{B}_Y)$-μετρήσιμη.*

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις $Y = \mathbb{R}$ ή $Y = \mathbb{C}$ (με τη συνηθισμένη τοπολογία).

Ειδικότερα μια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται Borel μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{B}_\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R})$-μετρήσιμη, και Lebesgue μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}_\lambda,\mathcal{B}_\mathbb{R})$-μετρήσιμη (όπου $\mathcal{M}_\lambda$ η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων).

Άσκηση 3.3 Η συνάρτηση χ_A είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν και μόνον αν $A \in \mathcal{M}$.

Πρόταση 3.4 *Αν $f : (X,\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$, τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(i) Η f είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη.
(ii) Για κάθε $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$.
(iii) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a,\infty)) \in \mathcal{M}$.
(iv) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty,a]) \in \mathcal{M}$.

Παρατήρηση 3.5 Αν $E \subseteq X$ και $f : E \to \mathbb{R}$, η f λέγεται μετρήσιμη στο E αν είναι $(\mathcal{M}_E, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη, όπου $\mathcal{M}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}$. Στην περίπτωση που η f ορίζεται στο X και $E \in \mathcal{M}$, η $f|_E$ είναι μετρήσιμη στο E αν και μόνον αν για κάθε $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ισχύει $(f^{-1}(B) \cap E) \in \mathcal{M}$.

Ορισμός 3.3 *Αν $(X, \mathcal{M})$ είναι μετρήσιμος χώρος, μια $f : X \to [-\infty, \infty]$ λέγεται $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-μετρήσιμη όπου $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subseteq [-\infty, \infty] : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$. Ισοδύναμα, η f είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν και μόνον αν $f^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{M}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$.*

Πρόταση 3.6 *Αν $(X, \mathcal{M})$ είναι μετρήσιμος χώρος, $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.*

Παρατηρήσεις 3.7 (α) Αν μια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel (δηλαδή $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη), τότε είναι Lebesgue μετρήσιμη, δηλαδή $(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
(β) Αν οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες, δεν αληθεύει πάντα ότι η σύνθεση $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Πρόταση 3.8 *Αν $(X, \mathcal{M})$ είναι μετρήσιμος χώρος, $f, g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και $p > 0$,*

(i) οι συναρτήσεις $|f|$ και $|f|^p$ είναι μετρήσιμες

(ii) οι συναρτήσεις $f + g$ και fg είναι μετρήσιμες.

Πρόταση 3.9 *Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος και $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες ($n \in \mathbb{N}$). Τότε*

1. *η συνάρτηση $\sup_n f_n$ είναι μετρήσιμη,*
2. *η συνάρτηση $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμη,*
3. *η συνάρτηση $\limsup_n f_n \equiv \inf_k \sup_{n \geq k} f_n$ είναι μετρήσιμη,*
4. *η συνάρτηση $\liminf_n f_n \equiv \sup_k \inf_{n \geq k} f_n$ είναι μετρήσιμη,*
5. *ειδικότερα, αν το κατά σημείο όριο $f \equiv \lim_n f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ υπάρχει, τότε είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Πρόταση 3.10 *Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος.*
(α) *Αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη, τότε οι $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = -\min\{f, 0\}$ και $|f| = f_+ + f_-$ είναι μετρήσιμες (και ικανοποιούν $f = f_+ - f_-$ και $f_+ f_- = 0$).*
(β) *Αν $g : X \to \mathbb{C}$ και $u = \frac{1}{2}(g + \bar{g})$, $v = \frac{1}{2i}(g - \bar{g})$, τότε η g είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν οι u και v είναι μετρήσιμες.*
(γ) *Αν η $g : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη, τότε οι $|g| = \sqrt{u^2 + v^2}$ και $\operatorname{sgn} g$ είναι μετρήσιμες, όπου $\operatorname{sgn} z = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \quad (z \in \mathbb{C})$.*

Απλές συναρτήσεις

Ορισμός 3.4 *Μια συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ λέγεται* **απλή** *αν το σύνολο $s(X)$ είναι πεπερασμένο. Αν $s(X) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$ τότε η $\{A_1, \dots A_n\}$ είναι διαμέριση του X και η s γράφεται σε* **κανονική μορφή:** $s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$.

Παρατηρήσεις 3.11 *Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος.*
(α) *Μια απλή συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ σε κανονική μορφή $s = \sum_k c_k \chi_{E_k}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν $E_k \in \mathcal{M}$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.*

(β) *Επομένως αν οι $s, t : X \to \mathbb{R}$ είναι απλές μετρήσιμες, το ίδιο ισχύει και για τις*

$$s + t,\ s \cdot t,\ \max\{s, t\},\ \min\{s, t\},\ s_+,\ s_-,\ |s| = s_+ + s_-.$$

Θεώρημα 3.12 *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μια συνάρτηση. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών με $s_n(X) \subseteq [0, +\infty)$ για κάθε n τέτοια ώστε*

$$s_n(x) \nearrow f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Αν η f είναι φραγμένη, μπορούμε να διαλέξουμε τις s_n ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα *στο X.*

Η ιδέα της απόδειξης: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτω

$$F_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Χωρίζω το $[0, n)$ σε $n \cdot 2^n$ διαστήματα $[0, \frac{1}{2^n}), [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}), \dots, [\frac{n2^n - 1}{2^n}, \frac{n2^n}{2^n})$ και θεωρώ τις αντίστροφες εικόνες μέσω της f :

$$E_{n,i} = \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \qquad i = 1, 2, \dots, n2^n.$$

Ορίζω

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{F_n}.$$

δηλαδή θέτω

$$s_n(x) = \begin{cases} n, & \text{αν } f(x) \geq n \\ \frac{i-1}{2^n}, & \text{αν } i = 1, 2, \dots, n2^n \text{ τέτοιο ώστε } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \end{cases}$$

Πρόταση 3.13 *Για κάθε $\mathcal{M}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, +\infty]$ υπάρχει ακολουθία (s_n) απλών $\mathcal{M}$-μετρησίμων συναρτήσεων ώστε $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f(x)$ και $s_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Αν η f είναι φραγμένη, μπορούμε να διαλέξουμε τις s_n ώστε $s_n \to f$* ομοιόμορφα *στο X.*

Θεώρημα 3.14 *Μια συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ή $f : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν και μόνον αν είναι το (κατά σημείο) όριο μιας ακολουθίας[1] $\{s_n\}$ (πραγματικών ή μιγαδικών) $\mathcal{M}$-μετρήσιμων απλών συναρτήσεων.*

[1] η $\{s_n\}$ δεν είναι κατ'ανάγκην μονότονη, μπορούμε όμως να την επιλέξουμε ώστε η $\{|s_n|\}$ να είναι αύξουσα

Συμπέρασμα Η κλάση των $\mathcal{M}$-μετρησίμων συναρτήσεων περιέχει τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις χ_A, $A \in \mathcal{M}$ και είναι κλειστή ως προς τις αλγεβρικές πράξεις:

$$f, g \text{ μετρήσιμες } \Rightarrow f+g,\ f\cdot g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\},\ |f|,\ f^+,\ f^- \text{ μετρήσιμες}$$

καθώς και τα κατά σημείο όρια ακολουθιών:

$$f_n\,(n\in\mathbb{N}) \text{ μετρήσιμες } \Rightarrow \sup_n f_n,\ \inf_n f_n,\ \lim_n f_n \text{ μετρήσιμες}$$

(αν το τελευταίο όριο υπάρχει).

3.2 Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Σε όλη την παράγραφο, σταθεροποιούμε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

3.2.1 Μη αρνητικές συναρτήσεις

Θα μελετήσουμε πρώτα τις ιδιότητες του ολοκληρώματος μη αρνητικών συναρτήσεων.

Ορισμός 3.5 *Συμβολίζουμε $\mathcal{L}^+(X,\mathcal{S})$ ή απλά $\mathcal{L}^+$ το σύνολο των μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to [0,+\infty]$.*

(i) *Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ είναι **απλή μετρήσιμη** σε κανονική μορφή $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}$ ορίζουμε*

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k) \in [0,+\infty]$$

(θέτουμε $0\cdot(+\infty) = 0$).

(ii) *Αν $f : X \to [0,+\infty]$ είναι **μετρήσιμη**, ορίζουμε*

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int s d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη}, 0 \le s \le f \right\}.$$

Αν $A \in \mathcal{S}$ ορίζουμε

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

Λήμμα 3.15 *Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ απλή μετρήσιμη και $s = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$ όπου $B_k \cap B_j = \emptyset$ για $k \neq j$, τότε*

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(B_k).$$

Πρόταση 3.16 *Αν $s,t : X \to [0,+\infty)$ απλές μετρήσιμες και $a \ge 0$, τότε*

(i) $\displaystyle\int as d\mu = a \int s d\mu$

(ii) $\displaystyle\int (s+t) d\mu = \int s d\mu + \int t d\mu$

(iii) *Αν* $s \le t$ *τότε* $\displaystyle\int s d\mu \le \int t d\mu.$

Πρόταση 3.17 *Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες και $a \geq 0$, τότε*

$$\text{(i)} \quad \int afd\mu = a\int fd\mu$$

$$\text{(ii)} \quad \text{Αν} \quad f \leq g \quad \text{τότε} \quad \int fd\mu \leq \int gd\mu.$$

$$\text{(iii)} \quad \text{Αν} \quad A \subseteq B \ (A, B \in \mathcal{S}) \quad \text{τότε} \quad \int_A fd\mu \leq \int_B fd\mu$$

$$\text{(iv)} \quad \text{Αν} \quad A \in \mathcal{S} \text{ και } \mu(A) = 0 \text{ ή } f|_A = 0 \quad \text{τότε} \quad \int_A fd\mu = 0.$$

Πρόταση 3.18 *Έστω $s : X \to [0, +\infty)$ απλή μετρήσιμη. Ορίζουμε*

$$\nu : \mathcal{S} \to [0, +\infty] : \nu(A) = \int_A sd\mu.$$

Τότε το ν είναι μέτρο.

Θεώρημα 3.19 (Μονότονης σύγκλισης του Lebesgue) *Αν (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρησίμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n : X \to [0, +\infty]$, τότε*

$$\int (\lim_n f_n) d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι αύξουσα και συνεπώς έχει όριο $f(x) \in [0, +\infty]$. Έχουμε δείξει ότι το κατά σημείο όριο μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη. Άρα η f είναι μετρήσιμη, και συνεπώς το $\int fd\mu$ υπάρχει (μπορεί να είναι $+\infty$). Επειδή $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, έχουμε $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int fd\mu$. Επομένως το όριο $\lim_n \int f_n d\mu \equiv a$ υπάρχει (μπορεί να είναι $+\infty$) και

$$a \leq \int fd\mu.$$

Μένει να δειχθεί η αντίστροφη ανισότητα. Από τον ορισμό του $\int fd\mu$ αρκεί να δείξουμε ότι αν s είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση με $0 \leq s \leq f$ ισχύει

$$\int sd\mu \leq a.$$

Σταθεροποιούμε ένα $c \in (0, 1)$ και θα δείξουμε ότι

$$c \int sd\mu \leq a.$$

Θέτουμε

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Παρατηρούμε ότι $E_n \in \mathcal{S}$ αφού η $f_n - cs$ είναι μετρήσιμη και ότι $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ αφού $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$.

Ισχυρισμός:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

Πράγματι, έστω $x \in X$. Αν $f(x) = 0$ τότε $s(x) = 0$ άρα $x \in E_n$ για κάθε n. Αν πάλι $f(x) > 0$ τότε $f(x) \geq s(x) > cs(x)$, οπότε εφόσον $f_n(x) \nearrow f(x)$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) \geq cs(x)$, άρα $x \in E_n$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θεωρούμε το μέτρο ν που ορίζεται από τη σχέση

$$\nu(E) = \int_E s d\mu, \quad E \in \mathcal{S}$$

Έχουμε

$$c\nu(E_n) = c\int_{E_n} s d\mu = \int_{E_n} cs d\mu \leq \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Όταν $n \to \infty$, έχουμε $\nu(E_n) \to \nu(X) = \int s d\mu$ από την σ-προσθετικότητα του ν (Πρόταση 3.18). Επίσης $\int f_n d\mu \to a$.

Συνεπώς $c\int s d\mu \leq a$. Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $c \in (0,1)$, θεωρώντας $c \nearrow 1$ προκύπτει

$$\int s d\mu \leq a.$$

Η ανισότητα αποδείχθηκε για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s με $0 \leq s \leq f$, και συνεπώς

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int s d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη}, \ 0 \leq s \leq f\right\} \leq a$$

άρα τελικώς $\int f d\mu = a$. $\square$

Πόρισμα 3.20 (Προσθετικότητα) *Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες, τότε*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Θεώρημα 3.21 (Beppo Levi) *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρησίμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n : X \to [0, +\infty]$, τότε*

$$\int \left(\sum_n f_n\right) d\mu = \sum_n \left(\int f_n d\mu\right).$$

Λήμμα 3.22 (Ανισότητα Chebyshev) *Αν $f \in \mathcal{L}^+$ και $c > 0$ τότε*

$$\int f d\mu \geq c\mu(\{x \in X : f(x) \geq c\}).$$

Πρόταση 3.23 *Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμες τότε*

(ι) $f = g$ *σχεδόν παντού* $\Longrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$

(ιι) $f = 0$ *σχεδόν παντού* $\iff \int f d\mu = 0$.

Πρόταση 3.24 *Αν $f_n, f \in \mathcal{L}^+$ και $f_n \nearrow f$ σ.π. τότε*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Παραδείγματα 3.25 *(α) Αν* $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ *τότε* $f_n \to f = 0$ *κατά σημείο αλλά* $\lim_n \int f_n d\lambda = 1 > \int \lim_n f d\lambda$.

(β) Αν $g_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$ *τότε* $g_n \to g = 0$ *κατά σημείο αλλά* $\lim_n \int g_n d\lambda = 1 > \int \lim_n g d\lambda$.

Θεώρημα 3.26 (Λήμμα Fatou) *Αν* $f_n : X \to [0, +\infty]$ *είναι μετρήσιμες* [2]

$$\int (\liminf_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Πόρισμα 3.27 *Αν* $f_n, f \in \mathcal{L}^+$ *και* $f_n \to f$ *σ.π. τότε*

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Πρόταση 3.28 *Αν* $f : X \to [0, +\infty]$ *είναι μετρήσιμη και* $\int f d\mu < \infty$ *τότε*

(ι) *Η* f *είναι σ.π. πεπερασμένη:* $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = 0$.

(ιι) *Το σύνολο* $\{x \in X : f(x) > 0\}$ *είναι σ-πεπερασμένο.*

3.2.2 Ολοκλήρωση μετρησίμων συναρτήσεων

Ορισμός 3.6 (**i**) *Έστω* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *μετρήσιμη και* $f_+ = \max\{f, 0\}$ *και* $f_- = -\min\{f, 0\}$. *Τότε οι* f_+ *και* f_- *είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα ορίζονται τα* $\int f_+ d\mu$ *και* $\int f_- d\mu$ *(στο* $\overline{\mathbb{R}}$*). Αν τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι πεπερασμένο, ορίζουμε*

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(**ii**) *Μια* $f : X \to \mathbb{R}$ *λέγεται* ***(απολύτως) ολοκληρώσιμη*** *αν είναι* ***μετρήσιμη*** *και*

$$\int |f| d\mu < +\infty.$$

Συμβολισμός:

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ ολοκληρώσιμη}\}.$$

Παρατήρηση 3.29 **(ι)** *Έστω* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *μετρήσιμη. Αν* $\int |f| d\mu < +\infty$, *τότε από την Πρόταση 3.28 η* $|f|$ *παίρνει μ-σχεδόν παντού πεπερασμένες τιμές, άρα το ίδιο ισχύει για τις* f, f^+ *και* f^-. *Επομένως υπάρχει* $g \in \mathcal{L}_1$ *ώστε* $g = f$ *μ-σχεδόν παντού.*

(ιι) *Αν* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *και* $f = f^+ - f^-$, *τότε επειδή* $0 \leq f^{\pm} \leq |f|$ *έχουμε* $f^{\pm} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. *Αν αντίστροφα οι* f^+ *και* f^- *είναι ολοκληρώσιμες τότε αφού* $|f| = f^+ + f^-$ *έχουμε* $\int |f| d\mu < +\infty$ *άρα* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. *Δηλαδή, αν η* f *είναι μετρήσιμη,*

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \;\Leftrightarrow\; |f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \;\Leftrightarrow\; f^+ \text{ και } f^- \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \;\Rightarrow\; \int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \mathbb{R}.$$

[2] Υπενθύμιση: $\liminf_n f_n = \lim_n(\inf\{f_k : k \geq n\}) = \sup_n(\inf\{f_k : k \geq n\})$.

Θεώρημα 3.30 *Ο $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμική απεικόνιση $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}$. Δηλαδή*

$$\begin{aligned} &\textit{αν } f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \textit{και } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \textit{τότε } f + \lambda g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \\ &\qquad\qquad \textit{και } \int (f + \lambda g) d\mu = \int f d\mu + \lambda \int g d\mu. \end{aligned}$$

Απόδειξη (ι) Επειδή $|f + \lambda g| \le |f| + |\lambda||g|$, έχουμε

$$\int |f + \lambda g| d\mu \le \int (|f| + |\lambda||g|) d\mu \overset{(3.17,3.20)}{=} \int |f| d\mu + |\lambda| \int |g| d\mu < +\infty.$$

(ια) Αν $h = f + g$ τότε οι $f^{\pm}, g^{\pm}$ και $h^{\pm}$ παίρνουν πραγματικές μόνο τιμές οπότε

$$\begin{aligned} & h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ & \Rightarrow h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^- \\ & \Rightarrow \int (h^+ + f^- + g^-) d\mu = \int (f^+ + g^+ + h^-) d\mu \qquad \text{(όλες μη αρνητικές)} \\ & \Rightarrow \int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int h^- d\mu \qquad \text{(Πόρισμα 3.20)} \\ & \Rightarrow \int h d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

(ιβ) Αν $\lambda \ge 0$ τότε $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ και $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ άρα

$$\begin{aligned} \int \lambda f d\mu &= \int (\lambda f)^+ d\mu - \int (\lambda f^-) d\mu = \int \lambda f^+ d\mu - \int \lambda f^- d\mu \\ &\overset{(3.17)}{=} \lambda \int f^+ d\mu - \lambda \int f^- d\mu = \lambda \int f d\mu. \end{aligned}$$

(ιγ) $(-f)^+ = f^-$ και $(-f)^- = f^+$ άρα

$$\begin{aligned} \int (-f) d\mu &= \int (-f)^+ d\mu - \int (-f^-) d\mu = \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu \\ &= -\left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) = -\int f d\mu. \end{aligned}$$

Πρόταση 3.31 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ τότε*

$$\begin{aligned} &(i) \qquad f \le g \quad \Longrightarrow \quad \int f d\mu \le \int g d\mu. \\ &(ii) \qquad \left| \int f d\mu \right| \le \int |f| d\mu \end{aligned}$$

Απόδειξη (ι) Εξ ορισμού αν $h \ge 0$ μετρήσιμη τότε $\int h d\mu \ge 0$. Επομένως $\int (g - f) d\mu \ge 0$. Αλλά $\int (g - f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu$.

(ιι) Έχουμε

$$
\begin{aligned}
-|f| \leq f \leq |f| &\Longrightarrow \int (-|f|)d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu \\
&\Longrightarrow -\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu \\
&\Longrightarrow \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.
\end{aligned}
$$

Πρόταση 3.32 *Έστω $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.*

(ι) *Αν $f = g$ μ-σ.π. τότε $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

(ιι) *$f = g$ μ-σ.π. αν και μόνον αν $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{S}$.*

Απόδειξη (ι) Αν $f = g$ μ-σ.π. τότε $|f - g| = 0$ μ-σ.π. οπότε $\int |f - g| d\mu = 0$, άρα

$$
0 \leq \left| \int f d\mu - \int g d\mu \right| = \left| \int (f - g) d\mu \right| \leq \int |f - g| d\mu = 0.
$$

(ιι) Αν $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{S}$, τότε θέτοντας $A^+ = \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$ και $A^- = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$, οπότε $A^\pm \in \mathcal{S}$, έχουμε

$$
\int |f - g| d\mu = \int_{A^+} (f - g) d\mu + \int_{A^-} (g - f) d\mu = 0
$$

άρα, αφού $|f - g| \geq 0$, έχουμε $|f - g| = 0$ μ-σ.π. (Πρόταση 3.23) επομένως $f = g$ μ-σ.π.

Πόρισμα 3.33 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $f \leq g$ μ-σ.π. τότε $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

Απόδειξη Αν $B = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ τότε $B \in \mathcal{S}$ και $\mu(B) = 0$. Αν $f_1 = f\chi_{B^c}$ και $g_1 = g\chi_{B^c}$ τότε $|f_1| \leq |f|$ και $|g_1| \leq |g|$ άρα $f_1, g_1 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $f_1 \leq g_1$ παντού άρα $\int f_1 d\mu \leq \int g_1 d\mu$. Αλλά $f = f_1$ και $g = g_1$ μ-σ.π. άρα $\int f d\mu = \int f_1 d\mu$ και $\int g d\mu = \int g_1 d\mu$.

Θεώρημα 3.34 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης) *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει για κάθε $x \in X$ και έστω $f(x) = \lim_n f_n(x)$.*

Αν υπάρχει $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ώστε[3] $|f_n| \leq g$ για κάθε n, τότε $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \\
\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.
\end{aligned}
$$

Απόδειξη Η f είναι μετρήσιμη διότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη. Εφόσον $|f_n| \leq g$ και $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, έχουμε $\int |f_n| d\mu \leq \int g d\mu < +\infty$ άρα $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Για τον ίδιο λόγο (εφόσον $|f| = \lim_n |f_n| \leq g$) έχουμε επίσης $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Επομένως

$$
\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu
$$

[3] υπενθυμίζουμε ότι η υπόθεση $|f_n| \leq g$ δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί (π.χ. 3.25)

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το θεώρημα 3.30 και η δεύτερη ανισότητα από την Πρόταση 3.31.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι
$$\int |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

Θέτουμε $h_n = |f_n - f|$ και παρατηρούμε ότι $0 \leq h_n \leq 2g$ και ότι $h_n(x) \to 0$ για κάθε x. Άρα $2g - h_n \geq 0$ και $2g - h_n \to 2g$ κατά σημείο. Από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\int \liminf_n (2g - h_n) d\mu \leq \liminf_n \int (2g - h_n) d\mu$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\int 2g d\mu = \int \liminf_n (2g - h_n) d\mu &\leq \liminf_n \int (2g - h_n) d\mu \\ = \int 2g d\mu + \liminf_n \int (-h_n) d\mu &= \int 2g d\mu - \limsup_n \int h_n d\mu\end{aligned}$$

άρα $\limsup_n \int h_n d\mu \leq 0$. Αλλά $\int h_n d\mu \geq 0$ άρα $\liminf_n \int h_n d\mu \geq 0$ επομένως

$$0 \leq \liminf_n \int h_n d\mu \leq \limsup_n \int h_n d\mu \leq 0$$

δηλαδή το όριο $\lim_n \int h_n d\mu$ υπάρχει και είναι 0. □

Παρατήρηση 3.35 *Τα συμπεράσματα των Θεωρημάτων Κυριαρχημένης Σύγκλισης και Μονότονης Σύγκλισης εξακολουθούν να ισχύουν αν οι υποθέσεις τους ικανοποιούνται μ-σχεδόν σε όλα τα σημεία του X.*

Για παράδειγμα, έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ και υπάρχει $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ μ-σχεδόν παντού. Αν ορίσουμε $f(x) = \lim_n f_n(x)$ στα σημεία $x \in X$ όπου το όριο υπάρχει και $f(x) = 0$ στα υπόλοιπα σημεία του χώρου, τότε η f είναι μετρήσιμη, ανήκει στον $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και ισχύει $\int |f_n - f| d\mu \to 0$.

Πρόταση 3.36 *Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(X, \overline{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ η πλήρωσή του. Αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ ή $f : X \to \mathbb{C}$ τότε*

(α) *αν η f είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη τότε είναι $\overline{\mathcal{S}}$-μετρήσιμη*

(β) *αν η f είναι $\overline{\mathcal{S}}$-μετρήσιμη τότε υπάρχει $\mathcal{S}$-μετρήσιμη συνάρτηση g ώστε $f \overset{\bar{\mu}}{\sim} g$.*

Πόρισμα 3.37 *Κάθε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ είναι λ-σχεδόν παντού ίση με μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση.*

3.3 Σύγκλιση ως προς την $\|\cdot\|_1$ – Ο χώρος $L^1(X,\mathcal{S},\mu)$

Συμβολισμός Αν $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ή $f : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη, γράφουμε

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \in [0,+\infty].$$

Παρατήρηση 3.38 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε $f + \lambda g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ και*

1. $\|\lambda g\|_1 = |\lambda| \|g\|_1$
2. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
3. $\|f\|_1 = 0$ *αν και μόνον αν* $f = 0$ μ*-σ.π.*

Ορισμός 3.7 *Μια ακολουθία (f_n) συναρτήσεων στον $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ λέγεται ότι συγκλίνει στην $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$* ***ως προς την*** *$\|\cdot\|_1$ (ή στον L^1) αν $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Γενικότερα, η (f_n) λέγεται* ***βασική ακολουθία ως προς την*** *$\|\cdot\|_1$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ για κάθε $m, n \geq n_o$.*

Παρατήρηση 3.39 *Αν η (f_n) συγκλίνει μ-σ.π., δεν έπεται κατ'ανάγκην ότι συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_1$.*
Για παράδειγμα έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2(1 - nx), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Τότε $f_n \in \mathcal{L}^1([0,1],\lambda)$ και $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα $f_n \to 0$ λ-σ.π., αλλά $\|f_n\|_1 = \frac{n}{2} \to \infty$.

Παρατήρηση 3.40 *Αν η (f_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_1$, δεν έπεται κατ'ανάγκην ότι συγκλίνει μ-σ.π. Μπορεί μάλιστα να αποκλίνει σε κάθε σημείο. Όπως θα δούμε όμως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.42, η (f_n) έχει πάντα μια υπακολουθία που συγκλίνει μ-σ.π.*

Παράδειγμα 3.41 Για κάθε n, έστω K_n το εξής πεπερασμένο κάλυμμα του $[0,1]$ από διαστήματα μήκους 2^{-n}: $K_1 = \{[0,\frac{1}{2}],][\frac{1}{2},1]\}, K_2 = \{[0,\frac{1}{4}],[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},\frac{3}{4}],[\frac{3}{4},1]\}$ και ούτω καθεξής. Το σύνολο $\cup_m K_m$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $I_1, I_2, \ldots$ μια αρίθμησή του, και έστω f_n η χαρακτηριστική συνάρτηση του I_n. Εφόσον κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε άπειρο πλήθος I_n και σε άπειρο πλήθος I_n^c, η ακολουθία $(f_n(x))$ δεν μπορεί να συγκλίνει. Από την άλλη όμως,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n| d\lambda = \lambda(I_n) \to 0$$

εφόσον για κάθε $m \in \mathbb{N}$, μόνον πεπερασμένο πλήθος από τα I_n έχει μήκος μεγαλύτερο από 2^{-m}. Επομένως $f_n \to 0$ ως προς την $\|\cdot\|_1$.

Θεώρημα 3.42 (Riesz-Fischer) *Έστω (f_n) μια ακολουθία στον $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ που είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_1$. Τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ ώστε $f_n \to f$ ως προς την $\|\cdot\|_1$.*

Επιπλέον, υπάρχει μια υπακολουθία της (f_n) που συγκλίνει στην f μ-σ.π.

Απόδειξη (ι) Εφόσον οι διαφορές $\|f_n - f_m\|_1$ «τείνουν στο 0», υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) ώστε $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_n\|_1 < +\infty$. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια υπακολουθία συγκλίνει μ-σ.π. σε μια $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Συγκεκριμένα, επιλέγουμε επαγωγικά γνησίως αύξουσα ακολουθία (n_k) ώστε

$$\|f_m - f_n\|_1 < \frac{1}{2^k} \quad (m, n \geq n_k) \tag{†}$$

Για ευκολία θέτουμε $h_k = f_{n_k}$,

$$g_k = |h_1| + |h_2 - h_1| + \ldots + |h_{k+1} - h_k|$$

και

$$g = \sup_k g_k = \lim_k g_k = |h_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |h_{k+1} - h_k|.$$

Τότε από το Θεώρημα B. Levi,

$$\begin{aligned}\int g d\mu &= \int |h_1| d\mu + \int \sum_{k=1}^{\infty} |h_{k+1} - h_k| d\mu \\ &= \int |h_1| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int |h_{k+1} - h_k| d\mu \leq \int |h_1| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty\end{aligned}$$

άρα $g(x) < +\infty$ σχεδόν για κάθε x. Με άλλα λόγια, υπάρχει $A \in \mathcal{S}$ με $\mu(A^c) = 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ η ακολουθία $(g_k(x))$ να συγκλίνει σε πεπερασμένο όριο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$, η σειρά

$$h_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{k+1}(x) - h_k(x))$$

συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει, σε πραγματικό αριθμό. Αλλά

$$h_{k+1}(x) = h_1(x) + (h_2(x) - h_1(x)) + \ldots + (h_{k+1}(x) - h_k(x)),$$

οπότε θέτοντας $f(x) = \lim_k h_k(x) = \lim_k f_{n_k}(x)$ για $x \in A$ και $f(x) = 0$ για $x \in A^c$ έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση f στο X. Επίσης,

$$\begin{aligned}\int_X |f| d\mu = \int_X \lim_m |h_{m+1}| d\mu &\leq \int_X \lim_m \left(|h_1| + \sum_{k=1}^{m} |h_{k+1} - h_k| \right) d\mu \\ &= \int_X g d\mu < +\infty\end{aligned}$$

άρα $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$.

(ιι) Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι το όριο ως προς την $\|\cdot\|_1$ ολόκληρης της ακολουθίας (f_n). Δοθέντος $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε k_o ώστε $\frac{1}{2^{k_o}} < \varepsilon$ οπότε από την (†) έχουμε

$$\|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon \qquad (m, n \geq n_{k_o}).$$

Συνεπώς αν $k \geq k_o$ και $m \geq n_{k_o}$ τότε $\|f_m - f_{n_k}\|_1 < \varepsilon$ άρα

$$\liminf_k \|f_m - f_{n_k}\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } m \geq n_{k_o}.$$

Επειδή όμως $f = \lim f_{n_k}$ σ.π., από το Λήμμα Fatou έχουμε για κάθε $m \geq n_{k_o}$

$$\|f - f_m\|_1 = \int_X |f - f_m| d\mu = \int_X \liminf_k |f_{n_k} - f_m| d\mu$$
$$\leq \liminf_k \int_X |f_{n_k} - f_m| d\mu \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Ο χώρος $L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$

Αν f, g είναι μ-σχεδόν παντού στο X ορισμένες συναρτήσεις[4] με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$ ή στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f \stackrel{\mu}{\sim} g$ αν οι f, g είναι ίσες μ-σχεδόν παντού.[5] Είναι άμεσο ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των σχεδόν παντού ορισμένων συναρτήσεων με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$ (αντίστοιχα, σχεδόν παντού ορισμένων συναρτήσεων με τιμές στο $\mathbb{C}$).

Από την Πρόταση 3.32(ιι) έπεται ότι αν οι f, g είναι μετρήσιμες μ-ισοδύναμες και μία από τις δύο είναι ολοκληρώσιμη, τότε (επειδή $\int |f| d\mu = \int |g| d\mu$) είναι και οι δύο στον $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{S}$. Δηλαδή η ύπαρξη και οι τιμές του ολοκληρώματος μιάς μετρήσιμης συνάρτησης εξαρτάται μόνον από την κλάση ισοδυναμίας της.

Μπορούμε λοιπόν να επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος στις συναρτήσεις που είναι ορισμένες και μετρήσιμες μ-σχεδόν παντού:[6] Θα λέμε ότι μια τέτοια συνάρτηση είναι (απολύτως) ολοκληρώσιμη αν είναι μ-ισοδύναμη με μια $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Ας συμβολίζουμε (προσωρινά) την κλάση ισοδυναμίας

$$\tilde{f} = \{g : E_g \to [-\infty, +\infty] \text{ μετρήσιμη με } g \stackrel{\mu}{\sim} f\}$$

και αντίστοιχα

$$\tilde{f} = \{g : E_g \to \mathbb{C} \text{ μετρήσιμη με } g \stackrel{\mu}{\sim} f\}$$

(όπου $E_g \in \mathcal{S}$ και $\mu(E_g^c) = 0$.) Μπορούμε τώρα να ορίσουμε

Ορισμός 3.8

$$L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{S}, \mu) = \{\tilde{f} : f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{S}, \mu)\} \qquad L^1(X, \mathcal{S}, \mu) = \{\tilde{f} : f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{S}, \mu)\}.$$

Με τις πράξεις $\tilde{f} + \tilde{g} = \widetilde{f+g}$ και $\lambda\tilde{f} = \widetilde{\lambda f}$, ο $L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ γίνεται γραμμικός χώρος διότι αν $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^1$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε αν $f_1, f_2 \in \tilde{f}$, $g_1, g_2 \in \tilde{g}$, οι $f_i + \lambda g_i$ $(i = 1, 2)$ ορίζονται μ-σχεδόν παντού, $f_1 + \lambda g_1 \stackrel{\mu}{\sim} f_2 + \lambda g_2$ και $\int |f_1 + \lambda g_1| d\mu \leq \int |f_1| d\mu + |\lambda| \int |g_1| d\mu < +\infty$. Επίσης, η $\|\cdot\|_1$ ορίζει μια νόρμα στον χώρο $L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$, διότι $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0$.

Με αυτήν την ορολογία, το Θεώρημα Riesz-Fischer λέει ακριβώς ότι ο χώρος $(L^1(X, \mathcal{S}, \mu), \|\cdot\|_1)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα, δηλαδή χώρος Banach.

Από την Πρόταση 3.36 έπεται ότι αν $(X, \overline{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ είναι η πλήρωση του $(X, \mathcal{S}, \mu)$, τότε υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του $L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και του $L^1(X, \overline{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ η οποία διατηρεί το ολοκλήρωμα. Συνεπώς θα ταυτίζουμε τους χώρους αυτούς:

$$L^1(X, \mathcal{S}, \mu) = L^1(X, \overline{\mathcal{S}}, \bar{\mu}).$$

Ειδικότερα

$$L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda) = L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda).$$

---

[4] Δηλαδή $f : E_f \to \overline{\mathbb{R}}$ ή $\mathbb{C}$ όπου το $X \setminus E_f$ είναι μ-μηδενικό σύνολο.

[5] Δηλαδή αν το σύνολο $E_{f,g} \equiv \{x \in E_f \cap E_g : f(x) = g(x)\}$ έχει μ-μηδενικό συμπλήρωμα.

[6] Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι μια μ-σχεδόν παντού ορισμένη συνάρτηση είναι μετρήσιμη (βλ. Παρατήρηση 3.5) στο πεδίο ορισμού της, έστω E_f (το οποίο μπορούμε να υποθέτουμε μετρήσιμο, περιορίζοντας κι άλλο την f εν ανάγκη), αν και μόνον αν έχει μια παντού ορισμένη μετρήσιμη επέκταση.

Αν $\tilde{f} \in L^1$ μπορώ να επιλέγω $g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη ώστε $g \in \tilde{f}$. Μάλιστα στην περίπτωση $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$ μπορώ να υποθέτω ότι η g είναι Borel μετρήσιμη (Πόρισμα 3.37). Συνήθως στην πράξη δεν κάνουμε διάκριση μεταξύ της συνάρτησης f και της κλάσης ισοδυναμίας $\tilde{f}$.

Παρατήρηση 3.43 *Στον $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ οι απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι πυκνό υποσύνολο: για κάθε $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ υπάρχει ακολουθία (f_n) από απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ώστε $\|f - f_n\|_1 \to 0$.*

Απόδειξη Υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες απλών μετρήσιμων συναρτήσεων (s_n) και (t_n) ώστε $s_n \nearrow f^+$ και $t_n \nearrow f^-$. Αν $f_n = s_n - t_n$ έχουμε
$f_n \to f^+ - f^- = f$ κατά σημείο και

$$|f_n| = |s_n - t_n| \le |s_n| + |t_n| \le f^+ + f^- = |f|.$$

Αφού η $|f|$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1$, έχουμε $f_n \in \mathcal{L}^1$ και από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι $\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| d\mu \to 0$.

Πρόταση 3.44 *Αν μ είναι κανονικό μέτρο Borel (μέτρο Borel - Stieltjes) στο $\mathbb{R}$, οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνό υποσύνολο*[7] *του $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu)$: για κάθε $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu)$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει g συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα ώστε $\|f - g\|_1 < \epsilon$.*

Απόδειξη Από την τελευταία Παρατήρηση, αρκεί να υποθέσουμε ότι $f = \chi_E$, όπου $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $\mu(E) = \int |f| d\mu < \infty$. Ξέρουμε (Πρόταση 2.19) ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένη ένωση $A = \cup_{k=1}^n I_k$ ξένων και φραγμένων διαστημάτων[8] ώστε $\mu(E \triangle A) < \epsilon$, οπότε $\|\chi_E - \chi_A\|_1 < \epsilon$. Για κάθε ένα από τα I_k μπορούμε να βρούμε μια συνεχή συνάρτηση $g_k : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με συμπαγή φορέα ώστε $\|g_k - \chi_{I_k}\|_1 < \frac{\epsilon}{n}$. Για παράδειγμα αν $I_k = (a, b]$ μπορώ να διαλέξω $[c, d] \supseteq (a, b]$ ώστε $0 < \mu([c, d] \setminus (a, b)) < \frac{\epsilon}{n}$ και να πάρω $g_k(t) = 1$ όταν $t \in [a, b]$, $g_k(s) = 0$ όταν $s \notin [c, d]$ και g_k «γραμμική» στα υπόλοιπα. Επειδή τα I_k είναι ξένα έχω $\chi_A = \sum_k \chi_{I_k}$ και συνεπώς

$$\left\|\chi_E - \sum_k g_k\right\|_1 \le \left\|\chi_E - \sum_k \chi_{I_k}\right\|_1 + \left\|\sum_k (\chi_{I_k} - g_k)\right\|_1 < \|\chi_E - \chi_A\|_1 + \sum_k \frac{\epsilon}{n} < 2\epsilon.$$

Πρόταση 3.45 *Αν $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και $\displaystyle\sum_n \int |f_n| d\mu < +\infty$ τότε η σειρά συγκλίνει μ-σ.π. και ως προς την $\|\cdot\|_1$ σε μια $f =\in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και $\displaystyle\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu$.*

Με άλλα λόγια, αν $f_n \in L^1$ και $\sum_n \|f_n\|_1 < +\infty$ τότε η σειρά $\sum_n f_n$ συγκλίνει στον $(L^1, \|\cdot\|_1)$.

---

[7] Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κανονικά μέτρα Borel σε τοπικά συμπαγείς χώρους Hausdorff.

[8] Από την Πρόταση 2.19 μπορούμε να γράψουμε $A = \cup_{j=1}^m (a_j, b_j)$· θέτουμε $J_1 = (a_1, b_1)$ και $J_j = (a_j, b_j) \setminus I_{j-1}$ όταν $j > 1$· κάθε J_j είναι πεπερασμένη ξένη ένωση φραγμένων διαστημάτων.

3.4 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

3.4.1 Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$

$$\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$$

σε ξένα ανά δύο διαστήματα $I_k = [t_{k-1}, t_k)$, $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ και $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ θέτουμε

$$\begin{aligned} M_i &= M_i(f) = \sup\{f(s) : s \in I_i\} \\ m_i &= m_i(f) = \inf\{f(s) : s \in I_i\} \qquad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

και

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \qquad U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(t_i - t_{i-1}).$$

Τα $L(f, \mathcal{P})$ και $U(f, \mathcal{P})$ ονομάζονται **το κάτω και άνω άθροισμα Riemann** της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Είναι σαφές ότι $L(f, \mathcal{P}) \le U(f, \mathcal{P})$. Θεωρώντας διαδοχικά διαμερίσεις με όλο και περισσότερα σημεία, θα παρατηρήσουμε ότι τα κάτω αθροίσματα μεγαλώνουν, παραμένοντας όμως όλα μικρότερα (ή ίσα) από κάθε άνω άθροισμα, ενώ τα άνω αθροίσματα μικραίνουν, παραμένοντας όμως όλα μεγαλύτερα (ή ίσα) από κάθε κάτω άθροισμα. Αν υπάρχει *ένας και μοναδικός* αριθμός I ανάμεσα στα κάτω και τα άνω αθροίσματα, δηλαδή τέτοιος ώστε να ισχύει $L(f, \mathcal{P}) \le I \le U(f, \mathcal{Q})$ για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ του $[a,b]$, τότε αυτός ο αριθμός ονομάζεται το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ δεν υπάρχει. Τα αθροίσματα Riemann λοιπόν αποτελούν κάτω και άνω προσεγγίσεις[9] του ολοκληρώματος Riemann, όταν αυτό υπάρχει.

Πρόταση 3.46 (Κριτήριο Riemann) *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_\varepsilon$ του $[a,b]$ ώστε*

$$U(f, \mathcal{P}_\epsilon) - L(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα:

Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ ορίζουμε **κλιμακωτές** συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$, $g_{\mathcal{P}}$ στο $[a,b]$ ως εξής: κάθε $t \in [a,b]$ ανήκει ακριβώς σε ένα από τα I_i και θέτουμε

$$h_{\mathcal{P}}(t) = m_i(f), \;\; g_{\mathcal{P}}(t) = M_i(f), \quad t \in I_i \; (i = 1, \dots, n)$$

δηλαδή

$$h_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} m_i(f) \chi_{I_i}, \quad g_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} M_i(f) \chi_{I_i}$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$h_{\mathcal{P}}(t) \le f(t) \le g_p(t) \quad \text{για κάθε } \; t \in [a,b]$$

$$\text{και} \quad \int_a^b h_{\mathcal{P}}(t) dt = L(f, \mathcal{P}), \quad \int_a^b g_{\mathcal{P}}(t) dt = U(f, \mathcal{P}).$$

Επομένως το κριτήριο Riemann αναδιατυπώνεται ως εξής:

[9] Μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι, είτε υπολογίσει τα άνω και κάτω αθροίσματα χρησιμοποιώντας ημι-άνοιχτα διαστήματα (όπως εδώ) είτε τα υπολογίσει χρησιμοποιώντας κλειστά διαστήματα, η ύπαρξη και η τιμή του ολοκληρώματος της f δεν επηρεάζονται.

Πρόταση 3.47 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις $g_\epsilon, h_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $g_\epsilon \le f \le h_\epsilon$ και $\int_a^b (h_\epsilon - g_\epsilon) < \epsilon$.*

3.4.2 Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue

Εξετάζουμε τώρα τη σχέση ανάμεσα στο ολοκλήρωμα Riemann και το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Θα δείξουμε ότι αν η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη τότε είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

Επειδή οι συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$ και $g_{\mathcal{P}}$ είναι κλιμακωτές (άρα απλές μετρήσιμες), το ολοκλήρωμα Riemann και το ολοκλήρωμα Lebesgue των συναρτήσεων αυτών συμπίπτουν.

Επιλέγουμε επαγωγικά διαμερίσεις $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{P}_n \subseteq \ldots$ ώστε η «λεπτότητα» (δηλαδή η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων) της P_n να είναι μικρότερη από $\frac{1}{n}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_{\mathcal{P}_n} = \sup_{\mathcal{P}} L(f,\mathcal{P}) \equiv \underline{\int_a^b} f, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_{\mathcal{P}_n} = \inf_{\mathcal{P}} U(f,\mathcal{P}) \equiv \overline{\int_a^b} f.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(h_{\mathcal{P}_n}) = (h_n)$ είναι αύξουσα και η $(g_{\mathcal{P}_n}) = (g_n)$ είναι φθίνουσα και ότι $h_n \le f \le g_n$ για κάθε n. Θέτουμε $h = \sup_n h_n$ και $g = \inf_n g_n$. Οι h, g είναι μετρήσιμες και

$$h \le f \le g.$$

Χωρίς καμμιά υπόθεση για την f (εκτός του ότι είναι φραγμένη) από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\int h d\lambda = \lim_n \int h_n d\lambda = \underline{\int_a^b} f \quad \text{και} \quad \int g d\lambda = \lim_n \int g_n d\lambda = \overline{\int_a^b} f.$$

Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα

$$\int h d\lambda = \int g d\lambda.$$

Εφόσον $h \le g$, η ισότητα αυτή ισχύει αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a,b]$.

Τότε έχουμε και $h(x) = f(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a,b]$ οπότε η f είναι μετρήσιμη[10], μάλιστα Lebesgue-ολοκληρώσιμη και

$$\int f d\lambda = \int h d\lambda = \underline{\int_a^b} f$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα Lebesgue της f συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Riemann.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής.

---

[10] για κάθε $c \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\{x \in [a,b] : f(x) < c\}$ διαφέρει από το σύνολο $\{x \in [a,b] : h(x) < c\}$ κατά ένα σύνολο μέτρου μηδέν, άρα είναι μετρήσιμο, γιατί τα σύνολα μέτρου μηδέν είναι Lebesgue μετρήσιμα.

Ισχυρισμός 3.48 *Έστω $x \in [a,b]$ που δεν ανήκει σε κανένα από τα διαχωριστικά σημεία καμμιάς από τις διαμερίσεις $\mathcal{P}_n$. Τότε η f είναι συνεχής στο x αν και μόνον αν $h(x) = f(x) = g(x)$.*

Απόδειξη Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $t \in [a,b]$ και $|t-x| < \delta$ να ισχύει $|f(t) - f(x)| < \epsilon$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \delta$, οπότε η λεπτότητα της διαμέρισης $\mathcal{P}_n$ είναι μικρότερη από δ. Έπεται ότι αν I_k είναι το διάστημα[11] της $\mathcal{P}_n$ όπου ανήκει το x, τότε κάθε $t \in I_k$ θα ικανοποιεί $|t-x| < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ και συνεπώς $|M_k(f) - f(x)| \leq \epsilon$ και $|m_k(f) - f(x)| \leq \epsilon$ άρα $|M_k(f) - m_k(f)| \leq 2\epsilon$. Αφού $x \in I_k$, έχουμε $g_n(x) = M_k(f)$ και $h_n(x) = m_k(f)$ οπότε $g_n(x) - h_n(x) \leq 2\epsilon$. Αλλά $0 \leq g(x) - h(x) \leq g_n(x) - h_n(x) \leq 2\epsilon$, πράγμα που σημαίνει (αφού το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετο) ότι $g(x) - h(x) = 0$.

Αν αντίστροφα $g(x) - h(x) = 0$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq g_n(x) - h_n(x) < \epsilon$ οπότε, αν $I_k = [t_{k-1}, t_k)$ είναι το διάστημα της $\mathcal{P}_n$ όπου ανήκει το x, τότε για κάθε $t \in I_k$ έχουμε $m_k(f) \leq f(t) \leq M_k(f)$ και $m_k(f) \leq f(x) \leq M_k(f)$ άρα

$$|f(t) - f(x)| \leq M_k(f) - m_k(f) = g_n(x) - h_n(x) < \epsilon.$$

Δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό διάστημα (t_{k-1}, t_k) ώστε για κάθε $t \in (t_{k-1}, t_k)$ να ισχύει $|f(t) - f(x)| < \epsilon$, που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x. □

Επομένως, αν υπάρχει ένα σύνολο $N_1 \subseteq [a,b]$ μέτρου μηδέν ώστε $h(x) = f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b] \setminus N_1$ και αν ονομάσουμε N την ένωση του N_1 με το (αριθμήσιμο) σύνολο $\cup_n \mathcal{P}_n$ όλων των σημείων όλων των διαμερίσεων $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε το N έχει μέτρο μηδέν και η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a,b] \setminus N$, δηλαδή σχεδόν παντού. Πράγματι, αν $x \notin N$ τότε το x δεν είναι σημείο καμμιάς διαμέρισης οπότε, αφού $h(x) = f(x) = g(x)$, η f είναι συνεχής στο x από τον Ισχυρισμό.

Αν αντίστροφα η f είναι συνεχής σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $N_2 \subseteq [a,b]$ μέτρου μηδέν ώστε η f να είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a,b] \setminus N_2$, τότε θέτοντας $M = N_2 \cup (\cup_n \mathcal{P}_n)$, από τον Ισχυρισμό προκύπτει η ισότητα $h(x) = f(x) = g(x)$ σε κάθε $x \in [a,b] \setminus M$. Έπεται τότε, αφού $\lambda(M) = 0$, ότι $\int h d\lambda = \int g d\lambda$, και συνεπώς το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ υπάρχει.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 3.49 *Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.*

Παρατήρηση 3.50 *Ας τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην έννοια «σχεδόν παντού συνεχής» και την έννοια «σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση»:*

Για παράδειγμα η συνάρτηση Dirichlet, δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών, δεν είναι πουθενά συνεχής, αλλά είναι σχεδόν παντού ίση με τη συνεχή συνάρτηση $f(t) = 0$. Αντίθετα η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ είναι σχεδόν παντού συνεχής (αφού είναι ασυνεχής μόνο στα σημεία $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$), αλλά δεν μπορεί να είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση, γιατί έχει άλμα στα δύο αυτά σημεία.

[11] μοναδικό, αφού τα I_n είναι ξένα

3.5 Σύγκλιση ακολουθιών μετρησίμων συναρτήσεων

Παρατήρηση 3.51 *Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες. Γνωρίζουμε ήδη τις εξής έννοιες σύγκλισης:*

1. $f_n \to f$ *ομοιόμορφα στο* X
2. $f_n \to f$ *κατά σημείο στο* X.
3. $f_n \to f$ *κατά σημείο* μ*-σχεδόν παντού.*
4. $f_n \to f$ *στον* L^1*, δηλαδή* $\int |f_n - f| d\mu \to 0$.

Είναι προφανές ότι (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) και ότι οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύουν.

Επίσης η (1) $\Rightarrow$ (4) δεν ισχύει εν γένει (παράδειγμα: $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, $f = 0$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$), ισχύει όμως σε χώρους πεπερασμένου μέτρου (από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης).

Η συνεπαγωγή (2) $\Rightarrow$ (4) δεν ισχύει χωρίς επιπλέον υποθέσεις (όπως π.χ. στα Θεωρήματα Μονότονης ή Κυριαρχημένης Σύγκλισης) ούτε σε χώρους πεπερασμένου μέτρου. Ένα παράδειγμα στον $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda))$ είναι η $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$, $f = 0$.

Ούτε όμως η συνεπαγωγή (4) $\Rightarrow$ (3) ισχύει. Ένα παράδειγμα είναι το 3.41. Το μόνο που μπορεί κανείς να συμπεράνει εν γένει από την $\|f_n - f\|_1 \to 0$ είναι ότι υπάρχει *υπακολουθία* (f_{k_n}) ώστε $f_{k_n} \to f$ σχεδόν παντού (Θεώρημα 3.42).

Ορισμός 3.9 *Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες. Λέμε ότι $f_n \to f$* ***κατά μέτρο*** *όταν*

για κάθε $\varepsilon > 0$, αν $\quad N(n, \varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \quad$ τότε $\quad \lim_n \mu(N(n, \varepsilon)) = 0.$

Πρόταση 3.52 (Lebesgue) *Έστω $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

Παραδείγματα 3.53 ***(α)*** *Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Δες το παράδειγμα 3.41.*

(β) *Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα σε χώρους άπειρου μέτρου. Για παράδειγμα η ακολουθία $(\chi_{[n,\infty)})$ τείνει στο 0 κατά σημείο, ενώ δεν συγκλίνει κατά μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$.*

Θεώρημα 3.54 (Egorov) *Έστω $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A_\delta \in \mathcal{S}$ με $\mu(A_\delta) < \delta$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A_\delta$.*

Η σύγκλιση στο συμπέρασμα του Θεωρήματος ονομάζεται πολλές φορές «σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση».

Απόδειξη Για κάθε k και $m \in \mathbb{N}$, έστω

$$E_m(k) = \bigcup_{n \geq m} N(n, \frac{1}{k}) = \{x : \exists n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Έχουμε $E_m(k) \supset E_{m+1}(k)$ για κάθε m και

$$\bigcap_{m \geq 1} E_n(k) = \{x : \forall m \,\exists n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| \nrightarrow 0\}$$

άρα $\mu\left(\bigcap_{m\geq 1} E_m(k)\right) = 0$. Επειδή $\mu(E_1(k)) < +\infty$, έπεται ότι $\lim_m \mu(E_m(k)) = 0$.

Επομένως για κάθε $\delta > 0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(E_{m_k}(k)) = \mu\left(\bigcup_{n=m_k}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})\right) < \frac{\delta}{2^k}.$$

Έστω

$$A_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{m_k}(k)$$

Τότε

$$\mu(A_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{m_k}(k)) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Ισχυρισμός: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A_δ^c.

Απόδειξη : Έστω $\epsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{k} < \epsilon$. Επειδή $A_\delta \supseteq E_{m_k}(k)$, αν $x \in A_\delta^c$ έχουμε $x \notin E_{m_k}(k)$ άρα για κάθε $n \geq m_k$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \epsilon$. Αφού το m_k δεν εξαρτάται από το x έχουμε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A_δ^c. $\square$

Το Θεώρημα Egorov δεν ισχύει πάντα σε χώρους άπειρου μέτρου. Ένα παράδειγμα είναι το 3.53 (β): Η ακολουθία $(\chi_{[n,\infty)})$ τείνει στο μηδέν παντού, αλλά δεν υπάρκει A_δ πεπερασμένου (πόσο μάλλον μικρού) μέτρου ώστε η $(\chi_{[n,\infty)})$ να τείνει στο μηδέν ομοιόμορφα στο A_δ^c.

Το αντίστροφο όμως του Θεωρήματος Egorov ισχύει. Μάλιστα ισχύει κάτι ισχυρότερο:

Πρόταση 3.55 *Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα τότε $f_n \to f$ σχεδόν παντού και κατά μέτρο.*

Απόδειξη Παραλείπεται.

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Ένα παράδειγμα είναι η ακολουθία (g_n) όπου
$g_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \leq t \leq n + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$.

Παρατήρηση 3.56 *Απο το Θεώρημα 3.54 και την Πρόταση 3.55 έπεται ότι σε χώρους **πεπερασμένου** μέτρου,*

$$f_n \to f \text{ σ.π.} \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \to f \text{ σχεδόν ομοιόμορφα.}$$

Επομένως, αν $f_n \to f$ σχ. ομοιόμορφα τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντα (ούτε σε χώρους πεπερασμένου μέτρου): η ακολουθία (f_n) στο Παράδειγμα 3.41 συγκλίνει στο 0 κατά μέτρο, όχι όμως σχεδόν παντού άρα ούτε σχεδόν ομοιόμορφα (Πρόταση 3.55).

Πρόταση 3.57 *Αν $f_n \to f$ στον L^1 τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

Απόδειξη Από την ανισότητα Chebyshev 3.22 έχουμε για κάθε $\epsilon > 0$,

$$\mu(N(n, \epsilon)) \leq \frac{1}{\epsilon} \int |f_n - f| d\mu = \frac{1}{\epsilon} \|f_n - f\|_1 \to 0. \qquad \square$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Ένα παράδειγμα είναι η ακολουθία $f_n = n^2 \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ στον $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$.