Θεώρημα Fubini και εφαρμογές

4 Μέτρα γινόμενο - Θεώρημα Fubini

Ορισμός 4.1 *Αν $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ είναι μετρήσιμοι χώροι, τα σύνολα $A \times B$ όπου $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ λέγονται* **μετρήσιμα ορθογώνια**. *Ορίζουμε* [1]

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{M}\{A \times B \subseteq X \times Y : A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}.$$

Παρατήρηση $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Πρόταση 4.1 *Αν $(Z, \mathcal{C})$ είναι μετρήσιμος χώρος και $f : Z \to X \times Y$, τότε η f είναι $\mathcal{C}$-$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρήσιμη αν και μόνον αν η $\pi_1 \circ f : Z \to X$ είναι $\mathcal{C}$-$\mathcal{A}$-μετρήσιμη και η $\pi_2 \circ f : Z \to Y$ είναι $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}$-μετρήσιμη (όπου π_i οι καρτεσιανές προβολές $X \times Y \to X$ και $X \times Y \to Y$).*

Πόρισμα 4.2 *Έστω $(Z, \mathcal{C})$ μετρήσιμος χώρος και $f_1, f_2 : Z \to \mathbb{R}$.*
(α) *Αν οι f_1, f_2 είναι μετρήσιμες, τότε οι $f_1 + f_2 : Z \to \mathbb{R}$ και $f_1 f_2 : Z \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες.*
(β) *Οι f_1, f_2 είναι μετρήσιμες αν και μόνον αν η $f_1 + i f_2 : Z \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη.*

Πρόταση 4.3 *Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ είναι χώροι μέτρου, υπάρχει μέτρο*

$$\pi \equiv \mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, +\infty]$$

ώστε

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{όταν} \;\; A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}.$$

Αν τα μ, ν είναι σ-πεπερασμένα, τότε το π είναι μοναδικό και σ-πεπερασμένο.

Η ιδέα της απόδειξης Το π ορίζεται καλά στην οικογένεια $\mathcal{C}$ των πεπερασμένων ξένων ενώσεων μετρησίμων ορθογωνίων. Η $\mathcal{C}$ είναι άλγεβρα (Πρόταση 1.7). Επεκτείνουμε το π στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα επέκτασης Καραθεοδωρή.

Ορισμός 4.2 *Αν $E \subseteq X \times Y$ και $f : X \times Y \to Z$, για κάθε $(x, y) \in X \times Y$ θέτουμε*

$$\begin{aligned}
E_x &= \{y \in Y : (x, y) \in E\} \subseteq Y \\
E^y &= \{x \in X : (x, y) \in E\} \subseteq X \\
f_x &: Y \to Z \qquad f_x(s) = f(x, s) \;(s \in Y) \\
f^y &: X \to Z \qquad f^y(t) = f(t, y) \;(t \in X).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$.

Πρόταση 4.4 *Αν $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ τότε για κάθε $(x, y) \in X \times Y$,*

$$E_x \in \mathcal{B}, \qquad E^y \in \mathcal{A}.$$

[1] Βεβαίως το σύνολο $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ δεν είναι άλγεβρα συνόλων, είναι όμως «στοιχειώδης οικογένεια» (Ορισμός 1.4).

Πρόταση 4.5 *Αν* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *είναι* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-μετρήσιμη τότε για κάθε* $(x, y) \in X \times Y$,

$$f_x \quad \text{είναι } \mathcal{B}\text{-μετρήσιμη}, \qquad f^y \quad \text{είναι } \mathcal{A}\text{-μετρήσιμη}.$$

Θεώρημα 4.6 (Fubini για χαρακτηριστικές) *Θεωρούμε* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *χώρους σ-πεπερασμένου μέτρου. Για κάθε* $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

(α) οι συναρτήσεις

$$X \to [0, +\infty] : \quad x \to \nu(E_x) = \int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y)$$
$$Y \to [0, +\infty] : \quad y \to \mu(E^y) = \int_X \chi_E(x, y) d\mu(x)$$

είναι $\mathcal{A}$ *(αντιστοίχως* $\mathcal{B}$*) μετρήσιμες και*

(β) ισχύουν οι ισότητες

$$\int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = (\mu \otimes \nu)(E).$$

Η ιδέα της απόδειξης Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mu(X) < \infty$ και $\nu(Y) < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\Theta \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ των συνόλων για τα οποία (όλα) τα συμπεράσματα του Θεωρήματος ισχύουν. Παρατηρούμε ότι η Θ περιέχει όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια. Αποδεικνύουμε ότι η Θ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ξένες ενώσεις, άρα περιέχει την άλγεβρα $\mathcal{C}$ που παράγουν τα μετρήσιμα ορθογώνια. Αποδεικνύουμε ότι η Θ είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης) καθώς και ως προς φθίνουσες τομές (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης). Έπεται τότε (δες το επόμενο Λήμμα) ότι η Θ περιέχει την σ-άλγεβρα που παράγουν τα μετρήσιμα ορθογώνια, άρα $\Theta = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Η επέκταση στην περίπτωση σ-πεπερασμένων μέτρων γίνεται γράφοντας τον $X \times Y$ ως αριθμήσιμη ξένη ένωση μετρησίμων ορθογωνίων πεπερασμένου μέτρου και εφαρμόζοντας την γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων και το Θεώρημα Beppo Levi.

Λήμμα 4.7 (Μονοτόνων κλάσεων) *Έστω* $\mathcal{C}$ *μια άλγεβρα συνόλων και* $\mathcal{M}$ *μια οικογένεια που είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις και ως προς φθίνουσες τομές (μια τέτοια* $\mathcal{M}$ *λέγεται* μονότονη κλάση*). Αν η* $\mathcal{M}$ *περιέχει την* $\mathcal{C}$*, τότε περιέχει την σ-άλγεβρα* $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ *που παράγει η* $\mathcal{C}$.

Πρόταση 4.8 (Αρχή Cavalieri) *Αν* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και* $E, F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*, τότε*

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)(E) = (\mu \otimes \nu)(F) \quad &\iff \quad \nu(E_x) = \nu(F_x) \quad \mu\text{-σχεδόν για κάθε } \ x \in X \\ &\iff \quad \mu(E^y) = \mu(F^y) \quad \nu\text{-σχεδόν για κάθε } \ y \in Y.\end{aligned}$$

Απόδειξη Από το Θεώρημα 4.6 έχουμε

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(x).$$

Παρατήρηση 4.9 Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.6, αν η

$$f : X \times Y \to [0, +\infty] \qquad \text{με} \;\; f(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}(x,y) \quad (c_k \geq 0)$$

είναι απλή και $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη, τότε η $\phi : X \to [0, +\infty]$ όπου

$$\phi(x) = \int_Y f(x,y) d\nu(y) = \sum_k c_k \nu((E_k)_x)$$

είναι $\mathcal{A}$ μετρήσιμη[2] ως γραμμικός συνδυασμός μετρησίμων συναρτήσεων.
Επιπλέον έχουμε

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_X \phi(x) d\mu(x) = \sum_k c_k \int_X \nu((E_k)_x) d\mu(x) = \sum_k c_k \pi(E)$$

συνεπώς

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \sum_k c_k \pi(E) = \int_{X \times Y} f(x,y) d\pi(x,y).$$

Γενικότερα,

Θεώρημα 4.10 (Tonelli) *Έστω $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ όπου οι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν η f είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη, τότε*

(α) οι συναρτήσεις

$$X \to [0, +\infty] : \;\; x \to \int_Y f(x,y) d\nu(y)$$
$$Y \to [0, +\infty] : \;\; y \to \int_X f(x,y) d\mu(x)$$

είναι $\mathcal{A}$ (αντιστοίχως $\mathcal{B}$) μετρήσιμες και

(β) ισχύουν οι ισότητες

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu).$$

Παράδειγμα 4.11 *Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα όταν δεν είναι και οι δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Για παράδειγμα, έστω $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ τα σύνολα Borel, μ το μέτρο Lebesgue και ν το μέτρο απαρίθμησης. Αν $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$, τότε τα τρία ολοκληρώματα $\int_Y (\int_X \chi_D d\mu) d\nu = 0$, $\int_X (\int_Y \chi_D d\nu) d\mu = 1$ και $\int_{X \times Y} \chi_D d(\mu \otimes \nu) = +\infty$ είναι διαφορετικά ανά δύο.*

Παράδειγμα 4.12 *Η υπόθεση $f \geq 0$ δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, αν $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ (μ το μέτρο απαρίθμησης) και*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ -1, & x = y+1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε $\int_Y (\int_X f d\mu) d\nu = 0$ ενώ $\int_X (\int_Y f d\nu) d\mu = 1$.
Παρατηρούμε εδώ ότι $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) = +\infty$.

[2] Δεν είναι εν γένει απλή. Πάρε για παράδειγμα την $f = \chi_E$ όπου $E \subseteq [0,1] \times [0,1]$ το σύνολο Borel $E = \{(x,y) : x \leq y\}$ και υπολόγισε την ϕ.

Θεώρημα 4.13 (Fubini) *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ όπου οι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε*

(α) *μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $\int_Y |f(x,y)|d\nu(y) < +\infty$*
και ν-σχεδόν για κάθε $y \in Y$ ισχύει ότι $\int_X |f(x,y)|d\mu(x) < +\infty$

(β) *οι (σχεδόν παντού ορισμένες) συναρτήσεις*

$$x \to \int_Y f(x,y)d\nu(y) \quad \textit{και} \quad y \to \int_X f(x,y)d\mu(x)$$

ορίζουν στοιχεία του $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (αντιστοίχως $L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$) και

(γ) *ισχύουν οι ισότητες*

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X \times Y} fd(\mu \otimes \nu).$$

Παρατήρηση 4.14 Τα Θεωρήματα Tonelli και Fubini συνήθως χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό: αν δοθεί μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα Tonelli οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \\
(ii) \quad & \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty \\
\text{και} \ (iii) \quad & \int_{X \times Y} |f(x,y)|d\pi(x,y) < \infty \quad (\text{όπου} \ \ \pi = \mu \otimes \nu)
\end{aligned}$$

είναι ισοδύναμες. Ελέγχουμε λοιπόν αν κάποιο από τα διαδοχικά ολοκληρώματα στο (i) ή στο (ii) δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα, οπότε έχουμε ότι $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \pi)$, και αν αυτό ισχύει, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini συμπεραίνουμε ότι το «διπλό» ολοκλήρωμα $\int_{X \times Y} fd\pi$ υπάρχει και ισούται με οποιοδήποτε από τα τα διαδοχικά ολοκληρώματα $\int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\mu(x)$ και $\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x)$.

4.1 Η Συνέλιξη στον $L^1(\mathbb{R})$

Εισαγωγή *Η ανάγκη της πράξης της «συνέλιξης» συναρτήσεων, που θα ορίσουμε σε λίγο, προήλθε από την Αρμονική Ανάλυση. Ένας εύκολος τρόπος να δεί κανείς τη χρησιμότητά της σε μια ειδική περίπτωση είναι ο εξής:*

$$\textit{Αν} \quad p(z) = \sum_{k=-N}^{N} a_k z^k \qquad \textit{και} \quad q(z) = \sum_{k=-N}^{N} b_k z^k \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

είναι δύο πολυώνυμα Laurent, τότε το κατά σημείο γινόμενο

$$\begin{aligned}
p(z)q(z) &= \sum_k \sum_m a_k b_m z^{k+m} \quad (k+m=n) \\
&= \sum_k \sum_n a_k b_{n-k} z^n = \sum_n \left(\sum_k a_k b_{n-k} \right) z^n
\end{aligned}$$

είναι ένα πολυώνυμο Laurent $r(z) = \sum_n c_n z^n$ *του οποίου οι συντελεστές*

$$c_n = \sum_k a_k b_{n-k} = \sum_m a_{n-m} b_m$$

προκύπτουν από την «συνέλιξη» ("convolution") των συντελεστών (a_k) *και* (b_k). *Γράφουμε* $(c_k) = (a_k) * (b_k)$.

Μπορούμε να ορίσουμε μια αντίστοιχη πράξη στο «συνεχές ανάλογο» των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα, τις (συνεχείς) συναρτήσεις με συμπαγή φορέα:

Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα (γράφουμε $f, g \in C_c(\mathbb{R})$), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $y \to f(x-y)g(y)$ είναι στον $C_c(\mathbb{R})$ και άρα το ολοκλήρωμα Riemann

$$(f * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

υπάρχει και ορίζει μια συνάρτηση $f * g \in C_c(\mathbb{R})$ (γιατί;). Ο ορισμός επεκτείνεται στον $f, g \in L^1(\mathbb{R})$:

Λήμμα 4.15 *Αν* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, *τότε σχεδόν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *(ως προς το μέτρο Lebesgue) έχουμε*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy < \infty \quad \textit{(ολοκλήρωμα Lebesgue).}$$

Απόδειξη Επιλέγουμε Borel αντιπροσώπους των κλάσεων $f, g \in L^1$ που συμβολίζουμε επίσης με f, g και θεωρούμε την συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (x, y) \to f(x-y)g(y).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι Borel μετρήσιμη, αφού οι συναρτήσεις

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to x - y \text{ και } (x, y) \to y$$

είναι Borel και η ϕ είναι το γινόμενο των συναρτήσεων

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (x, y) \to (x-y) \to f(x-y) \text{ και } (x, y) \to y \to g(y).$$

Έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(x, y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx \overset{(*)}{=} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = |g(y)| \, \|f\|_1$$

όπου η ισότητα $(*)$ οφείλεται στο αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue ως προς μεταθέσεις (δες το Λήμμα 4.17). Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(x, y)|dx \right) dy = \int |g(y)| \, \|f\|_1 \, dy = \|g\|_1 \, \|f\|_1 < +\infty.$$

Από το Θεώρημα Tonelli, το ολοκλήρωμα της $|\phi|$ ως προς το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \lambda_2)$, και

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)g(y)|d\lambda_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(x, y)|dx \right) dy = \|g\|_1 \, \|f\|_1 \, . \qquad (1)$$

Κατά συνέπεια η συνάρτηση Borel $x \to \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy$ είναι πεπερασμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Υπάρχει λοιπόν σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ μέτρου μηδέν ώστε $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \in \mathbb{C}$ για κάθε $x \in A^c$. Γράφουμε

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \qquad (x \in A^c).$$

Από το Θεώρημα 4.13 (β) έπεται ότι η σχέση αυτή ορίζει ένα στοιχείο του $L^1(\mathbb{R})$ που συμβολίζεται $f*g$ και ονομάζεται **η συνέλιξη (convolution)** των f και g. Ισχύει μάλιστα η

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right| dx \le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(x,y)|dx \right) dy \overset{(1)}{=} \|g\|_1 \|f\|_1 \,. \qquad (2)$$

Ορίσαμε λοιπόν μια απεικόνιση

$$(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \times (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) : (f,g) \to f * g$$

που είναι προφανώς διγραμμική. Η ανισότητα (2) δείχνει ότι είναι συνεχής. Πράγματι, αν οι f_n, f, g_n, g είναι στον L^1 και $\|f_n - f\|_1 \to 0$ και $\|g_n - g\|_1 \to 0$ τότε

$$\|(f_n * g_n) - (f * g)\|_1 \to 0$$

γιατί

$$\begin{aligned} \|f_n * g_n - f * g\|_1 &= \|f_n * (g_n - g) + (f_n - f) * g\|_1 \\ &\le \|f_n * (g_n - g)\|_1 + \|(f_n - f) * g\|_1 \\ &\le \|f_n\|_1 \|g_n - g\|_1 + \|f_n - f\|_1 \|g\|_1 \to 0 \,. \end{aligned}$$

Η συνέχεια επιτρέπει, για να αποδείξουμε ιδιότητες της συνέλιξης στον L^1, να περιοριζόμαστε σε έναν πυκνό υπόχωρο αποτελούμενο από «επαρκώς λείες» συναρτήσεις:

Λήμμα 4.16 *Η συνέλιξη είναι (διγραμμική) μεταθετική και προσεταιριστική στον L^1: αν οι f, g, h ανήκουν στον L^1 τότε*

$$(i) \quad f * g = g * f \quad \textit{και} \quad (ii) \quad (f * g) * h = f * (g * h) \,.$$

Απόδειξη Από την συνέχεια της συνέλιξης[3] και το γεγονός ότι ο χώρος $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^1, \|\cdot\|_1)$ (Πρόταση 3.44), αρκεί να υποθέσουμε ότι οι f, g, h είναι στον $C_c(\mathbb{R})$. Τότε, από τις γνωστές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann,

$$\begin{aligned} (g * f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)f(t)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} g(y)f(x-y)(-dy) \qquad (x - t = y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = (f * g)(x) \,. \end{aligned} \qquad (3)$$

[3]για την ακρίβεια, χρειαζόμαστε τη συνέχεια της $(f,g) \to f * g$, καθώς και της $(f,g,h) \to (f * g) * h - f * (g * h)$

Επίσης

$$\begin{aligned}
(f*(g*h))(x) &= \int f(x-y)(g*h)(y)dy = \int f(x-y)\left(\int g(y-t)h(t)dt\right)dy \\
&= \int \left(\int f(x-y)g(y-t)dy\right)h(t)dt \\
&= \int \left(\int f(x-t-u)g(u)du\right)h(t)dt \qquad (u=y-t) \\
&= \int (f*g)(x-t)h(t)dt = ((f*g)*h)(x)\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Λήμμα 4.17 *Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1$ τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε*

$$(i) \quad \int_{\mathbb{R}} f(y-x)dy = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \quad \textit{και} \quad (ii) \quad \int_{\mathbb{R}} f(-y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt.$$

Επομένως αν $f_x(y)=f(y-x)$ τότε $f_x\in\mathcal{L}^1$ και

$$\|f_x\|_1 = \|f\|_1 \quad \textit{για κάθε} \;\; x\in\mathbb{R}.$$

Απόδειξη Αν $f=\chi_E$ όπου $E\subseteq\mathbb{R}$ είναι Borel ή Lebesgue μετρήσιμο τότε $f(y-x)=\chi_{E+x}(y)$ και άρα $\int f(y-x)dy=\lambda(E+x)=\lambda(E)=\int f(t)dt$. Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι $\int f(y-x)dy=\int f(t)dt$ όταν η f είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση, και η γενική περίπτωση αποδεικνύεται προσεγγίζοντας την f με μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η (ii), εφόσον $\int \chi_E(-y)dy=\lambda(-E)=\lambda(E)=\int\chi_E(t)dt$.

Παρατήρηση 4.18 *Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η απεικόνιση $U_x: f\to f_x$ είναι μια καλά ορισμένη γραμμική ισομετρία $L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})$.*

Πράγματι, $\quad \|U_x f\|_1 = \int |f(t-x)|dt = \int |f(t)|dt = \|f\|_1\,.$

Λήμμα 4.19 *Για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R})$ η απεικόνιση*

$$\mathbb{R}\to L^1(\mathbb{R}) : x\to f_x$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη Έστω $\epsilon>0$. Υπάρχει $g\in C_c(\mathbb{R})$ ώστε $\|f-g\|_1<\epsilon$ οπότε και $\|f_x-g_x\|_1 = \|U_x(f-g)\|_1<\epsilon$ για κάθε x, άρα έχουμε για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\|f_x-f_y\|_1 \le \|f_x-g_x\|_1 + \|g_x-g_y\|_1 + \|g_y-f_y\|_1 < 2\epsilon + \|g_x-g_y\|_1\,.$$

Αλλά $g\in C_c(\mathbb{R})$, οπότε υπάρχει $M>0$ ώστε $g(t)=0$ όταν $|t|>M$ και η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει λοιπόν $\delta>0$ ώστε $|u-v|<\delta \Rightarrow |g(u)-g(v)|<\epsilon$. Επομένως αν $|x-y|<\min(\delta,M)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g_x-g_y\|_1 &= \int |g(t-x)-g(t-y)|dt = \int_{-2M}^{2M} |g(t-x)-g(t-y)|dt \\
&\le \int_{-2M}^{2M} \epsilon dt = 4M\epsilon \qquad (\text{διότι} \;\; |(t-x)-(t-y)|<\delta \;\; \text{για κάθε} \;\; t)
\end{aligned}$$

άρα τελικώς

$$\|f_x-f_y\|_1 < 2\epsilon + \|g_x-g_y\|_1 < (2+4M)\epsilon. \qquad \square$$

4.2 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^1(\mathbb{R})$

Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $t \to e^{-2\pi i\xi t}f(t)$ είναι στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και άρα ο τύπος

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi t}f(t)dt \qquad\qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

ορίζει μια συνάρτηση $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Η $\hat{f}$ ονομάζεται **ο μετασχηματισμός Fourier της** f.

Λήμμα 4.20 *Η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$ (με $\sup_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$).*

Απόδειξη Η $\hat{f}$ είναι φραγμένη:

$$|\hat{f}(\xi)| \le \left| \int e^{-2\pi i\xi t}f(t)dt \right| \le \int |e^{-2\pi i\xi t}f(t)|dt = \int |f(t)|dt = \|f\|_1 \,.$$

Η $\hat{f}$ είναι συνεχής: αν $\xi_n \to \xi$ τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^{-2\pi i\xi_n t}f(t) \to e^{-2\pi i\xi t}f(t)$. Επειδή $|e^{-2\pi i\xi_n t}f(t)| \le |f(t)|$ και $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι $\hat{f}(\xi_n) \to \hat{f}(\xi)$. $\square$

Λήμμα 4.21 (Riemann - Lebesgue) *Η συνάρτηση $\hat{f}$ ανήκει στον $C_0(\mathbb{R})$, δηλαδή:*

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Απόδειξη Αν $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned}\int f(t-(2\xi)^{-1})e^{-2\pi i\xi t}dt &= \int f(s)\exp\left(-2\pi i\xi(s+(2\xi)^{-1})\right)ds \\ &= \int f(s)e^{-2\pi i\xi s}e^{-\pi i}ds = -\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} 2\hat{f}(\xi) &= \int \left(f(t) - f(t-(2\xi)^{-1})\right)e^{-2\pi i\xi t}dt \\ \text{άρα} \quad 2|\hat{f}(\xi)| &\le \int \left|f(t) - f(t-(2\xi)^{-1})\right|dt = \left\|f - f_{(2\xi)^{-1}}\right\|_1 \,.\end{aligned}$$

Όμως από το Λήμμα 4.19 έχουμε $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \left\|f - f_{(2\xi)^{-1}}\right\|_1 = \lim\limits_{x\to 0} \|f - f_x\|_1 = 0.$ $\square$

Παρατήρηση 4.22 *Επειδή οι τιμές της $\hat{f}$ εξαρτώνται μόνον από την κλάση της f στον L^1, ορίζεται μια απεικόνιση*

$$L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}) : \; f \to \hat{f}$$

*που ονομάζεται **ο μετασχηματισμός Fourier**.*

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ δεν έπεται πάντα ότι $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (παράδειγμα;). Αν όμως συμβεί η $\hat{f}$ να ανήκει και αυτή στον $L^1(\mathbb{R})$, μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία και να θεωρήσουμε την συνάρτηση $t \to \int e^{+2\pi i\xi t}\hat{f}(\xi)d\xi$. Το αποτέλεσμα είναι ενδιαφέρον:

Θεώρημα 4.23 (Αντιστροφής) *Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ τότε σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\int e^{+2\pi i\xi t}\hat{f}(\xi)d\xi = f(t).$$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος είναι το θεμελιώδες

Πόρισμα 4.24 (Μοναδικότητα) *Ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 στον L^1: αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\hat{f}(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ τότε $f(t) = 0$ σχεδόν παντού.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος, θα χρειασθεί το

Λήμμα 4.25 *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ τότε*

$$\int \hat{f}(x)g(x)dx = \int f(y)\hat{g}(y)dy$$

Απόδειξη Εφόσον $g \in L^1(\mathbb{R})$ και η $\hat{f}$ είναι φραγμένη και συνεχής (Λήμμα 4.20) το πρώτο ολοκλήρωμα υπάρχει (στο $\mathbb{C}$). Ομοίως υπάρχει και το δεύτερο. Έχουμε

$$\int \hat{g}(y)f(y)dy = \int \left(\int g(x)e^{-2\pi ixy}dx \right) f(y)dy = \int \left(\int \phi(x,y)dx \right) dy$$

$$\text{και} \quad \int \hat{f}(x)g(x)dx = \int \left(\int f(y)e^{-2\pi ixy}dy \right) g(x)dx = \int \left(\int \phi(x,y)dy \right) dx$$

όπου $\phi(x,y) = g(x)f(y)e^{-2\pi ixy}$. Η ϕ είναι μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^2$ και

$$\int\int |\phi(x,y)|dxdy = \int |g(x)|dx \int |f(y)|dy < +\infty.$$

Επομένως το Θεώρημα Tonelli δείχνει ότι $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Τώρα από το Θεώρημα Fubini έπεται ότι τα διαδοχικά ολοκληρώματα της ϕ είναι ίσα, που είναι το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος αντιστροφής

Η ιδέα της απόδειξης: Αντί του $\int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$f_\delta(x) = \int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}e^{-\pi\delta\xi^2}d\xi$$

όπου $\delta > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\delta_n \to 0$ ώστε $f_{\delta_n}(x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε x. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο καθώς $\delta_n \to 0$ με την ολοκλήρωση οπότε θα έχουμε, σχεδόν για κάθε x,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}e^{-\pi\delta_n\xi^2}d\xi = \int \lim_{n\to\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}e^{-\pi\delta_n\xi^2}d\xi = \int e^{2\pi i\xi t}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $\qquad g(\xi) = e^{2\pi i\xi x}e^{-\pi\delta\xi^2}$.

Η g ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ και ένας υπολογισμός [4] δείχνει ότι

$$\hat{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \exp\left(-\frac{\pi}{\delta}(x-y)^2\right) \equiv K_\delta(x-y).$$

Άλλος ένας υπολογισμός δείχνει ότι η συνάρτηση K_δ έχει τις εξής ιδιότητες:

[4] Αν δεν μπορείς να κάνεις τον υπολογισμό, δες το αρχείο «Μια χρήσιμη συνάρτηση»

(i) $K_\delta(t) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(t)dt = 1$

(iii) για κάθε $\eta > 0$, $\lim\limits_{\delta\to 0} \int_{|t|\geq\eta} K_\delta(t) = 0$.

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.25:

$$\int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}e^{-\pi\delta\xi^2}d\xi = \int \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int f(y)\hat{g}(y)dy = \int f(y)K_\delta(x-y)dy = (K_\delta * f)(x).$$

Εξετάζουμε λοιπόν την συμπεριφορά της διαφοράς $(K_\delta * f) - f$ καθώς $\delta \to 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(K_\delta * f)(x) - f(x) &= (f * K_\delta)(x) - f(x)\left(\int K_\delta(y)dy\right) \quad (\text{από την } (ii))\\ &= \int f(x-y)K_\delta(y)dy - \int f(x)K_\delta(y)dy = \int (f(x-y) - f(x))K_\delta(y)dy.\end{aligned}$$

Ισχυρισμός Αν

$$F_\delta(x) = \int (f(x-y) - f(x))K_\delta(y)dy$$

τότε $\lim\limits_{\delta\to 0} \|F_\delta\|_1 = 0$.

Απόδειξη Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|F_\delta(x)| \leq \int |f(x-y) - f(x)|K_\delta(y)dy$$

και άρα, εφόσον η συνάρτηση $(x, y) \to |f(x-y)-f(x)|K_\delta(y)$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^2$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Tonelli έχουμε

$$\begin{aligned}\|F_\delta\|_1 = \int |F_\delta(x)|dx &\leq \int \left(\int |f(x-y) - f(x)|K_\delta(y)dy\right)dx\\ &= \int \left(\int |f(x-y) - f(x)|dx\right)K_\delta(y)dy\\ &= \int \|f_y - f\|_1 K_\delta(y)dy.\end{aligned}$$

Έστω τώρα $\epsilon > 0$. Από το Λήμμα 4.19, υπάρχει $\eta > 0$ ώστε

$$|y| < \eta \ \Rightarrow\ \|f_y - f\|_1 < \epsilon.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\|F_\delta\|_1 &\leq \int_{|y|<\eta} K_\delta(y)dy + \int_{|y|\geq\eta} \|f_y - f\|_1 K_\delta(y)dy\\ &\leq \epsilon \int_{|y|<\eta} K_\delta(y)dy + \int_{|y|\geq\eta} \|f_y - f\|_1 K_\delta(y)dy\\ &\leq \epsilon + 2\|f\|_1 \int_{|y|\geq\eta} K_\delta(y)dy\end{aligned}$$

γιατί $\int_{|y|<\eta} K_\delta(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}} K_\delta(y)dy = 1$ και $\|f_y - f\|_1 \leq \|f_y\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$.

Τώρα από την ιδιότητα (iii) του K_δ μπορούμε να βρούμε $\delta_o > 0$ ώστε $\int_{|y|\geq\eta} K_\delta(y)dy < \epsilon$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_o)$. Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Αν λοιπόν θέσουμε $G_n = F_{1/n}$ τότε $\lim_{n\to\infty} \|G_n\|_1 = 0$.

Έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία G_{k_n} που συγκλίνει στο 0 σχεδόν παντού.

Δείξαμε ότι υπάρχει ακολουθία $\delta_n = \frac{1}{k_n} \to 0$ ώστε $(K_{\delta_n} * f) - f \to 0$ σχεδόν παντού, δηλαδή

$$\int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i\xi x} e^{-\pi\delta_n\xi^2} d\xi = (K_{\delta_n} * f)(x) \to f(x) \qquad \text{σχεδόν για κάθε } \; x \in \mathbb{R}.$$

Από την άλλη μεριά η ακολουθία (h_n) όπου $h_n(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}e^{-\pi\delta_n\xi^2}$ συγκλίνει κατά σημείο στην $\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}$ καθώς $n \to \infty$ και ικανοποιεί $|h_n(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|$. Εφόσον $\hat{f} \in L^1$ από την υπόθεση, έπεται λόγω κυριαρχημένης σύγκλισης ότι $\int h_n(\xi)d\xi \to \int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$ και άρα

$$\int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi = \lim_n \int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}e^{-\pi\delta_n\xi^2}d\xi = f(x) \qquad \text{σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Κλείνουμε με μια παρατήρηση που αποτελεί το «συνεχές ανάλογο» των εισαγωγικών σχολίων στην παράγραφο για την συνέλιξη:

Παρατήρηση 4.26 *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ικανοποιούν $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, τότε (βεβαίως $\hat{f} * \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ και)*

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}.$$

Απόδειξη Άσκηση. Εφάρμοσε το Θεώρημα αντιστροφής και το Θεώρημα Fubini.