Μια χρήσιμη συνάρτηση*

Λήμμα 1 $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \qquad (a>0).$$

Απόδειξη Αν $K = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx$ τότε $K = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx$ από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Παρατήρησε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)}$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^2_+)$, άρα από Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ay^2}dy = K^2.$$

Πάλι από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, αν $D_M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : x^2+y^2\le M^2\}$ και χ_M είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του D_M τότε

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \lim_{M\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2_+}\chi_M f d\lambda_2 = \lim_{M\to+\infty}\int_{D_M} f d\lambda_2.$$

Τώρα το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης, άρα, όπως μάθαμε στον Απειροστικό Λογισμό ΙΙΙ,

$$\begin{aligned}\int_{D_M} f(x,y)d\lambda_2(x,y) &= \int_{D_M} e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^M e^{-\frac{1}{2}ar^2}rdrd\theta\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^M e^{-\frac{1}{2}ar^2}rdr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}au^2}}{-a}\right]_0^M = \frac{\pi}{2a}\left(1-e^{-\frac{1}{2}aM^2}\right)\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \lim_{M\to+\infty}\int_{D_M} f d\lambda_2 = \frac{\pi}{2a}.$$

Επομένως $K^2 = \dfrac{\pi}{2a}$ οπότε $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx = 2K = \sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}.$ $\square$

Πρόταση 2 *Αν $a>0$ και ϕ είναι η "Gaussian" $\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}ax^2}$ τότε η $\hat{\phi}$ είναι επίσης Gaussian: $\hat{\phi}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{2\pi^2}{a}\xi^2}$.*

Απόδειξη Αν (ξ_n) είναι τυχαία ακολουθία $\xi_n\neq\xi$ και $\xi_n\to\xi$,

$$\frac{\hat{\phi}(\xi_n)-\hat{\phi}(\xi)}{\xi_n-\xi} = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i\xi_n t}-e^{-2\pi i\xi t}}{\xi_n-\xi}\phi(t)dt\,.$$

*gauss, 4/01/07

Αλλά $\lim_n \dfrac{e^{-2\pi i\xi_n t}-e^{-2\pi i\xi t}}{\xi_n-\xi}\phi(t)=\dfrac{\partial}{\partial\xi}(e^{-2\pi i\xi t})\phi(t)$ για κάθε t και

$$\left|\frac{e^{-2\pi i\xi_n t}-e^{-2\pi i\xi t}}{\xi_n-\xi}\phi(t)\right| = \left|\frac{e^{-2\pi i(\xi_n-\xi)t}-1}{\xi_n-\xi}\phi(t)\right| \overset{(1)}{\le} 2\pi|t\phi(t)|\,.$$

Επειδή η συνάρτηση $t\to t\phi(t)$ είναι στον $L^1(\mathbb{R})$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\phi}}{d\xi}(\xi) &= \lim_n \frac{\hat{\phi}(\xi_n)-\hat{\phi}(\xi)}{\xi_n-\xi} = \int_{\mathbb{R}} \lim_n \frac{e^{-2\pi i\xi_n t}-e^{-2\pi i\xi t}}{\xi_n-\xi}\phi(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial\xi}(e^{-2\pi i\xi t})\phi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \left(-2\pi i t e^{-2\pi i\xi t}\right)e^{-\frac{1}{2}at^2}dt \\
&= \frac{2\pi i}{a}\int_{\mathbb{R}}\left(-ate^{-\frac{1}{2}at^2}\right)e^{-2\pi i\xi t}dt = \frac{2\pi i}{a}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi(t)\right)e^{-2\pi i\xi t}dt \\
&= \frac{2\pi i}{a}\left(\left[\phi(t)e^{-2\pi i\xi t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}}\phi(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2\pi i\xi t}\right)dt\right) \quad (\text{γιατί;}) \\
&= 0-\frac{2\pi i}{a}\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\left(-2\pi i\xi e^{-2\pi i\xi t}\right)dt = -\frac{4\pi^2}{a}\xi\int_{\mathbb{R}}\phi(t)e^{-2\pi i\xi t}dt \\
&= -\frac{4\pi^2}{a}\xi\hat{\phi}(\xi).
\end{aligned}$$

Δηλαδή η συνάρτηση $\psi(\xi)=\hat{\phi}(\xi)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\psi'(\xi)+\frac{4\pi^2}{a}\xi\psi(\xi)=0$$

και άρα

$$\frac{d}{d\xi}\left(\psi(\xi)e^{\frac{2\pi^2}{a}\xi^2}\right) = \left(\psi'(\xi)+\frac{4\pi^2}{a}\xi\psi(\xi)\right)e^{\frac{2\pi^2}{a}\xi^2}=0.$$

Έπεται ότι η $\xi\to\psi(\xi)e^{\frac{2\pi^2}{a}\xi^2}$ είναι σταθερή, άρα ίση με $\psi(0)$, οπότε

$$\psi(\xi)=\psi(0)e^{-\frac{2\pi^2}{a}\xi^2}.$$

Όμως, από το Λήμμα 1,

$$\psi(0)=\hat{\phi}(0)=\int\phi(t)dt=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

επομένως τελικά

$$\hat{\phi}(\xi)=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{2\pi^2}{a}\xi^2}. \qquad \square$$

Πόρισμα 3 *Αν $x\in\mathbb{R}$ και $\delta>0$ είναι σταθεροί αριθμοί και*

$$g(\xi)=e^{2\pi i\xi x}e^{-\pi\delta\xi^2} \qquad \text{τότε} \quad \hat{g}(y)=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi}{\delta}(x-y)^2}.$$

Απόδειξη

$$\hat{g}(y)=\int\left(e^{2\pi i\xi x}e^{-\pi\delta\xi^2}\right)e^{-2\pi i\xi y}d\xi=\int e^{-2\pi i\xi(y-x)}e^{-\pi\delta\xi^2}d\xi=\hat{h}(y-x)$$

όπου $h(\xi)=e^{-\pi\delta\xi^2}$. Θέτοντας όμως $a=2\pi\delta$ στην Πρόταση έχουμε

$$\hat{h}(y)=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi}{\delta}y^2}. \qquad \square$$

[1] χρησιμοποίησα την ανισότητα $\left|\frac{e^{iax}-1}{a}\right|=\left|\frac{2}{a}\sin\frac{ax}{2}\right|\le|x|$, όπου $a,x\in\mathbb{R}$