Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι
Δυό ενδιαφέροντα παραδείγματα

Στο[1] $[0,1]$ με την σ-άλγεβρα Borel και το μέτρο Lebesgue, θεωρούμε τα διαστήματα

$$I_{0,m} = [0, \frac{1}{2^m}] \quad \text{και} \quad I_{j,m} = (\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}] \quad 0 < j < 2^m.$$

Πρώτο Παράδειγμα *Θεωρούμε την ακολουθία* (f_n) *όπου* f_n *είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος* $I_{0,m} = [0, \frac{1}{2^m}]$ *όταν* $n = 2^m$ *και* $I_{j,m} = (\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}]$ *όταν* $n = 2^m + j$, $0 < j < 2^m$.

Παρατηρούμε ότι η (f_n) δεν συγκλίνει στο 0 μ-σ.π. (μάλιστα, για κάθε x η ακολουθία $(f_n(x))$ αποκλίνει[2]).

Άσκηση 1 *ΚΑΘΕ υπακολουθία* (g_n) *της* (f_n) *έχει μια υπακολουθία* (g_{k_m}) *που συγκλίνει στο* 0 *σ.π.-μ. Μάλιστα, μπορούμε να επιλέξουμε την* (g_{k_m}) *ώστε να συγκλίνει στο* 0 *σε κάθε σημείο εκτός ενδεχομένως από ένα (!).*

Παρατήρηση 1 *Ας θυμηθούμε ότι μια ακολουθία* (a_n) *σε έναν τοπολογικό ή μετρικό χώρο συγκλίνει (στο* a*) αν και μόνον αν κάθε υπακολουθία της έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει (στο* a*). [Απόδειξη;]*

Αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση κατά σημείο σχεδόν παντού δεν είναι σύγκλιση ως προς κάποια τοπολογία! Όπως θα δούμε αργότερα, η σύγκλιση κατά σημείο είναι σύγκλιση ως προς τη λεγόμενη τοπλογία γινόμενο.

Παραδείγματα υπακολουθιών: Έστω g_n η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[0, \frac{1}{2^n}]$. Τότε $g_n(0) = 1$ για κάθε n, οπότε η «κατακόρυφη» (g_n) δεν μπορεί να έχει υπακολουθία που να συγκλίνει στο 0 *παντού*.

Από την άλλη μεριά, αν (g_n) είναι η «οριζόντια» ακολουθία που αποτελείται από τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις των διαστημάτων $[0, \frac{1}{2}], (\frac{2}{4}, \frac{3}{4}], (\frac{6}{2^3}, \frac{7}{2^3}], \ldots$, τότε για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $g_n(x) = 0$ τελικά, δηλ. μετά από κάποιο $n_0(x)$, οπότε η (g_n) και άρα όλες οι υπακολουθίες της συγκλίνουν στο 0 *παντού*.

Δεύτερο Παράδειγμα *Έστω* $U_1 = I_{1,1} = (\frac{1}{2}, 1]$, $U_2 = I_{1,2} \cup I_{3,2} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup (\frac{3}{4}, 1]$ *και γενικά*

$$U_m = \bigcup_{i=1}^{2^{m-1}} I_{2i-1,m} = \bigcup \{ I_{j,m} : j \text{ περιττός } 0 < j < 2^m \}$$

(ένα σχήμα θα βοηθήσει). Ορίζουμε $h_m = \chi_{U_m}$.

Άσκηση 2 *Δείξτε ότι η* (h_m) *δεν συγκλίνει στον* L^1.
[Υπόδειξη: υπολογίστε την $\|h_{m-1} - h_m\|_1$.]

Δείξτε όμως ότι, αν θέσουμε $h(x) = \frac{1}{2}$ *για κάθε* x, *τότε για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση* g *έχουμε*

$$\int h_m g d\lambda \to \int h g d\lambda.$$

Δηλαδή $h_m \to h$ *«ασθενώς».*[3] *Παρατηρείστε ότι οι* h_m *παίρνουν μόνον τις τιμές* 0 *και* 1, *ενώ η* h *μόνον την τιμή* $\frac{1}{2}$*! Επομένως αποκλείεται η* (h_m)*, ή κάποια υπακολουθία της, να συγκλίνει στην* h *σχεδόν παντού.*

Ειδικότερα, αν $A \subseteq [0,1]$ *είναι υποσύνολο Borel, τότε*

$$\lambda(U_m \cap A) \to \frac{1}{2} \lambda(A).$$

---

[1] naskxtra, 14 Δεκ. 08

[2] έχει σημεία συσσώρευσης και το 0 και το 1

[3] Ο δυικός του χώρου Banach L^1 είναι ο L^∞ - βλ. Μεταπτυχιακή Ανάλυση ΙΙ.